



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

PERSPECTIVA CATEGÓRICA DE LOS TEOREMAS DE LIE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

RODRIGO SERAFÍN ADAME IBARRA

TUTOR

MsC. LUIS MANUEL REYES DE LA LUZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2025

*Dedicado a mi padre Serafín Adame Pérez*

# Agradecimientos

Agradezco a mi padre por la educación brindada, directa o indirectamente, no solo en el aspecto académico. A mi madre por su cariño. A mis hermanos Alberto y Azucena por sus ocurrencias. A los amigos que hice desde la educación primaria hasta la licenciatura y que siguen en mi vida. A Luis por siempre aclarar mis dudas de la carrera desde primer semestre y que hoy asesora esta tesis. Y a Catherine por en general estar siempre a mi lado y en particular por estarlo mientras redacté la tesis.

# Resumen

En el presente se pretende dar una perspectiva categórica a los teoremas de Lie. Para ello, en el capítulo 1 nos ponemos en sintonía con el lenguaje de la teoría de categorías y en el capítulo 2 repasamos la geometría diferencial necesaria. En el capítulo 3 introducimos la noción de grupo de Lie mediante la caracterización de objeto grupo de una categoría y a partir de ahí construimos el álgebra de Lie asociada a cualquier grupo de Lie. Finalmente, en el capítulo 4 llegamos a la demostración de los teoremas de Lie en términos del llamado funtor de Lie.

# Índice general

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Agradecimientos</b>                                         | <b>II</b>  |
| <b>Resumen</b>                                                 | <b>III</b> |
| <b>Prólogo</b>                                                 | <b>VI</b>  |
| <b>1. Teoría de categorías</b>                                 | <b>1</b>   |
| 1.1. Conjuntos y clases . . . . .                              | 1          |
| 1.2. Categorías . . . . .                                      | 1          |
| 1.3. Adjuntos, límites y equivalencias de categorías . . . . . | 12         |
| 1.4. Lema de Yoneda . . . . .                                  | 22         |
| <b>2. Geometría Diferencial</b>                                | <b>26</b>  |
| 2.1. Variedades . . . . .                                      | 26         |
| 2.2. Espacio tangente . . . . .                                | 33         |
| 2.3. Campos vectoriales . . . . .                              | 40         |
| 2.4. Subvariedades . . . . .                                   | 46         |
| 2.5. Cubrientes y distribuciones . . . . .                     | 51         |
| <b>3. Grupos y álgebras de Lie</b>                             | <b>55</b>  |
| 3.1. Grupos objeto . . . . .                                   | 55         |
| 3.2. Grupos topológicos . . . . .                              | 60         |
| 3.3. Grupos de Lie . . . . .                                   | 62         |
| 3.3.1. Primeros ejemplos . . . . .                             | 62         |
| 3.3.2. Representaciones lineales y tensores . . . . .          | 65         |
| 3.3.3. Grupos de Lie lineales . . . . .                        | 68         |
| 3.4. Álgebras de Lie . . . . .                                 | 72         |
| 3.4.1. Álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie . . . . .     | 72         |
| 3.4.2. Álgebras de Lie lineales . . . . .                      | 77         |

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. Teoremas de Lie</b>                                 | <b>83</b> |
| 4.1. El funtor de Lie . . . . .                           | 83        |
| 4.2. Los teoremas de Lie . . . . .                        | 86        |
| 4.3. Aplicación: Clasificación de grupos de Lie . . . . . | 91        |

# Prólogo

La teoría de categorías, más que una teoría matemática, es un lenguaje que da importancia a la estructura de los objetos matemáticos y las relaciones existentes entre ellos.

La teoría de categorías nace con el artículo '*General Theory of Natural Equivalences*' publicado por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1945. El contexto de dicho artículo se enmarca dentro de la topología algebraica, rama de la topología que estudia invariantes de tipo algebraico asociados a espacios topológicos. Eilenberg y Mac Lane necesitaban un lenguaje preciso para explicar como pasar de la topología al álgebra: Pasar de un espacio topológico a un objeto algebraico y de una función continua a un homomorfismo entre los correspondientes objetos algebraicos. Así surge la noción de funtor y asignación funtorial.

Sin embargo, citando al propio Mac Lane, la teoría de categorías se invento para estudiar transformaciones naturales antes que funtores ([Mac98]). El papel central de las transformaciones naturales queda expuesta en el lema de Yoneda.

El otro protagonista de nuestra historia es la teoría de Lie, iniciada a finales del siglo XIX por el matemático noruego Sophus Lie. Siguiendo el espíritu de que la geometría de un espacio está determinada por su grupo de simetrías, tal como declaraba Felix Klein en su Programa de Erlangen (1872), Lie se propuso estudiar los grupos de simetrías continuas.

El objetivo de Lie era encontrar una teoría que fuera a las ecuaciones diferenciales el análogo de lo que la teoría de Galois es para ecuaciones polinomiales. Esto lo llevó a definir de forma rudimentaria y clasificar lo que hoy conocemos como grupos de Lie: conjuntos que son simultáneamente grupos (con una estructura algebraica) y variedades diferenciables (con una estructura geométrica), y donde ambas estructuras son compatibles.

El descubrimiento de Lie fue que la estructura 'global' y no lineal de un grupo de Lie está casi completamente determinada por su estructura 'local' y linealizada en la identidad. Dicha estructura local es un espacio vectorial que además cuenta con una operación llamada 'corchete de Lie', y que hoy conocemos como el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie. Todo el contenido de la relación entre grupos de Lie y álgebras de Lie descubierta por Lie se enunció en los tres teoremas que hoy llevan su nombre.

El juego entre estas dos estructuras —el grupo global y el álgebra local—, al que apelan los tres teoremas de Lie, pueden enunciarse con una claridad y elegancia usando las herramientas de la teoría de categorías

El objetivo de esta tesis es explorar precisamente esa relación entre estructuras. Demostraremos cómo la correspondencia de Lie, que asigna un álgebra de Lie a cada grupo de Lie, es de naturaleza funtorial. Más profundamente, veremos cómo esta correspondencia se eleva a una equivalencia de categorías entre la categoría de las álgebras de Lie de dimensión finita y la categoría de los grupos de Lie simplemente conexos. Al hacerlo, esperamos ilustrar cómo la teoría de categorías funciona como un lenguaje para la matemática.

# Capítulo 1

## Teoría de categorías

### 1.1. Conjuntos y clases

Una teoría de conjuntos axiomática nos libra de paradojas que surgen de la laxitud con la que se considera lo que es un conjunto. En el sistema axiomático *ZFC*, formulado en un lenguaje de primer orden, se establece un conjunto y la pertenencia como nociones primitivas, siendo una clase una colección arbitraria de estos conjuntos, como por ejemplo  $\{x : x = x\}$  corresponde a la clase de todos los conjuntos. Una clase en *ZFC* nos sirve para agrupar pero las clases no son objetos matemáticos de la teoría, no podemos cuantificar ni hacer afirmaciones sobre ellos. Por otro lado, el sistema axiomático *NGB* (de Neumann-Gödel-Bernays) toma como nociones primitivas el concepto de clase y pertenencia, para a partir de ahí definir a un conjunto como un elemento cualesquiera de una clase. *NGB* es una extensión conservativa de *ZFC* en el sentido de que todo teorema de *ZFC* también es teorema de *NGB*.

Para la teoría de categorías, donde manejamos colecciones tan grandes como la de todos los conjuntos o todos los grupos, es necesario recurrir a clases. Por ello es que tácitamente asumiremos la axiomatización de la teoría de conjuntos *NGB*, sin ahondar más, pues no perseguimos los fundamentos en esta tesis.

### 1.2. Categorías

En esta sección se dará la definición de categorías y se proporcionarán ejemplos de las mismas pero haciendo hincapié en la categoría de conjuntos (**Set**) o categorías cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son funciones, pues en estas categorías donde los conceptos presentados son más familiares. Posteriormente, se introducirá el concepto de funtores, que vienen a ser asignaciones entre categorías de manera análoga a como función es una asignación entre elementos de dos conjuntos.

Finalmente, se hablará de las transformaciones naturales, que actúan como los morfismos entre funtores.

Los conceptos trabajados en este capítulo están basados en [Awo10] y [Mac98].

**Definición 1.2.1** (Categoría). *Una categoría  $\mathcal{C}$  consiste en*

1. *Una clase  $Ob(\mathcal{C})$  cuyos elementos son llamados  $\mathcal{C}$ -objetos o simplemente objetos cuando no haya confusión.*
2. *Para cada  $A, B \in Ob(\mathcal{C})$  existe un conjunto  $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ , cuyos elementos se nombraran  $\mathcal{C}$ -morfismos de  $A$  a  $B$  o simplemente morfismos. Además, si  $A, B, A', B' \in Ob(\mathcal{C})$  son tales que  $A \neq A'$  o  $B \neq B'$  entonces*

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$$

3. *Para cada  $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$  existe una función*

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

*llamada ley de composición y esta satisface:*

- a) (**Asociatividad**) *Para cada  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$  y  $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$  se tiene*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- b) (**Identidad**) *Para cada  $A \in Ob(\mathcal{C})$  existe un  $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$  tal que para cada  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  y  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$  se tiene*

$$f \circ 1_A = f$$

$$1_A \circ g = g$$

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  categoría y  $A \in Ob(\mathcal{C})$ . El morfismo  $1_A$  de la definición 1.2.1 es único. En consecuencia, llamaremos a  $1_A$  el morfismo identidad de  $A$ .*

*Demostración.* Usaremos los axiomas de la ley de composición en 1.2.1. Si  $1'_A$  es otra identidad de  $A$  entonces  $1_A = 1_A 1'_A = 1'_A$ . □

**Observación 1.2.1.** *Si  $\mathcal{C}$  es categoría con  $A, B \in Ob(\mathcal{C})$  y  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  entonces diremos que el dominio del morfismo  $f$  es  $dom(f) := A$ , y el codominio del morfismo es  $cod(f) := B$ .*

Algunas categorías son:

**Ejemplo 1.2.1 (Set).** *La categoría **Set**:*

1.  $Ob(\mathbf{Set})$  es la clase de todos los conjuntos.
2.  $Hom_{\mathbf{Set}}(A, B)$  es el conjunto de todas las funciones  $f$  de  $A$  a  $B$ .
3. La composición de morfismos es la composición usual de funciones, la cual claramente es asociativa y donde la función  $Id_A : A \rightarrow A$ ,  $Id_A(a) = a$  actúa como el morfismo identidad de  $A$ .

**Ejemplo 1.2.2 (Grp).** *La categoría **Grp**:*

1.  $Ob(\mathbf{Grp})$  es la clase de todos los grupos.
2.  $Hom_{\mathbf{Grp}}(G, H)$  es el conjunto de todos los homomorfismos de grupos  $f$  de  $G$  a  $H$ .
3. La ley de composición es la composición de funciones.

**Ejemplo 1.2.3 (Top).** *La categoría **Top**:*

1.  $Ob(\mathbf{Top})$  es la clase de todos los espacios topológicos.
2.  $Hom_{\mathbf{Top}}(X, Y)$  es el conjunto de todos los homeomorfismos  $f$  de  $X$  a  $Y$ .
3. La ley de composición es la composición de funciones.

**Ejemplo 1.2.4** (Categoría asociada a un COPO). *Sea  $(X, \leq)$  un COPO. Definimos su categoría asociada  $\mathcal{C}$  como*

1.  $Ob(\mathcal{C}) := X$
2. Para cada  $x, y \in X$  definimos

$$Hom_{\mathcal{C}}(x, y) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \not\leq y \\ \{\ell_x^y\} & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

3. La composición entre  $\ell_x^y \in Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$  y  $\ell_y^z \in Hom_{\mathcal{C}}(y, z)$  es

$$\ell_x^y \circ \ell_y^z = \ell_x^z$$

Nótese que la composición está bien definida por la transitividad de  $\leq$ . Y en este caso, para  $x \in X$  su identidad es  $\ell_x^x$  en virtud de que  $\leq$  es reflexiva.

**Ejemplo 1.2.5** (Categoría opuesta). *Dada  $\mathcal{C}$  una categoría, construimos la categoría opuesta  $\mathcal{C}^{op}$  como sigue.*

1.  $Ob(\mathcal{C}^{op}) := Ob(\mathcal{C})$ .
2. Para  $X, Y \in Ob(\mathcal{C}^{op})$  se define  $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) := Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ .
3. Para  $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$  y  $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z)$  se define la composición

$$g \circ_{\mathcal{C}^{op}} f := f \circ_{\mathcal{C}} g$$

**Ejemplo 1.2.6** (Categoría producto). Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías, entonces la categoría producto es  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  tal que

1.  $Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \{(X, Y) : X \in Ob(\mathcal{C}) \wedge Y \in Ob(\mathcal{D})\}$ .
2. Si  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in Ob(\mathcal{C})$  entonces  $Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) := \{(f, g) : f \in Hom_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) \wedge g \in Hom_{\mathcal{D}}(Y_1, Y_2)\}$ .
3. Si  $(f_1, g_1) \in Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X_1, Y_1), (X_2, Y_2))$  y  $(f_2, g_2) \in Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X_2, Y_2), (X_3, Y_3))$  entonces

$$(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) := (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$$

**Definición 1.2.2** (Tipos de morfismos). Sea  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  un  $\mathcal{C}$ -morfismo en alguna categoría  $\mathcal{C}$ , decimos que  $f$  es un:

1. *monomorfismo* si

$$\forall C \in Ob(\mathcal{C}) \forall g_1, g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A) (f \circ g_1 = f \circ g_2 \rightarrow g_1 = g_2)$$

2. *epimorfismo* si

$$\forall C \in Ob(\mathcal{C}) \forall g_1, g_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C) (g_1 \circ f = g_2 \circ f \rightarrow g_1 = g_2)$$

3. *bimorfismo* si  $f$  es un monomorfismo y un epimorfismo.

4. *un isomorfismo* si

$$\exists g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A) (f \circ g = 1_B \wedge g \circ f = 1_A)$$

5. *endomorfismo* si  $A = B$ .

6. *automorfismo* si  $f$  es un isomorfismo y un endomorfismo.

Además, decimos que  $f$  es una:

1. retracción si

$$\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)(f \circ g = 1_B)$$

2. sección si

$$\exists g \in \text{Hom}(B, A)(g \circ f = 1_A)$$

**Proposición 1.2.2.** Sea  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$   $\mathcal{C}$ -morfismo. Entonces:

1. Si  $f$  es una sección entonces es un monomorfismo.
2. Si  $f$  es una retracción entonces es un epimorfismo.
3.  $f$  es isomorfismo si y solo si  $f$  es una sección y una retracción. Se sigue que todo isomorfismo es un bimorfismo.

*Demostración.* Si  $f$  es una retracción con  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  morfismo tal que  $g \circ f = 1_A$  y  $f \circ g_1 = f \circ g_2$  entonces  $g \circ (f \circ g_1) = g \circ (f \circ g_2)$  y por asociatividad de los  $\mathcal{C}$ -morfismos, como dicta la definición 1.2.1, se sigue que

$$g_1 = (g \circ f) \circ g_1 = (g \circ f) \circ g_2 = g_2$$

Por tanto  $g_1 = g_2$ . Similarmente se demuestra el segundo inciso. El tercer inciso es aplicación directa de las definiciones 1.2.2 y los dos incisos anteriores.  $\square$

**Proposición 1.2.3.** Para  $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$  con  $A \neq \emptyset$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es un monomorfismo.
2.  $f$  es inyectiva.
3.  $f$  es una sección.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es un monomorfismo. Si  $x, y \in A$  son tales que  $f(x) = f(y)$  entonces  $f \circ c_x = f \circ c_y$ , con  $c_x, c_y : \{*\} \rightarrow A$  dadas por  $c_x(*) = x$  y  $c_y(*) = y$ . Por lo tanto  $c_x = c_y$  y en consecuencia  $x = y$ .

Si suponemos que  $f$  es función inyectiva entonces  $f$  es una sección en **Set** pues si  $x_0 \in A$  es fijo, definimos  $g : B \rightarrow A$  dada por

$$g(x) = \begin{cases} x_0 & \text{si } x \notin f[A] \\ f^{-1}(x) & \text{si } x \in f[A] \end{cases}$$

se tiene que  $g \circ f = 1_A$

Finalmente, el tercer inciso implica al primero por la proposición 1.2.2.  $\square$

**Proposición 1.2.4.** *Para  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es un epimorfismo.
2.  $f$  es suprayectiva.
3.  $f$  es una retracción.

*Demostración.* Si  $f$  es un epimorfismo pero no es función suprayectiva entonces existe  $x_0 \in B \setminus f[A]$ . Si definimos  $g_1, g_2 : B \rightarrow \{0, 1\}$  mediante  $g_1(x) = 1$  y  $g_2 = \chi_{f[A]}$ , donde  $\chi$  denota la función característica, entonces  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$  y por ser  $f$  epimorfismo se tiene que  $g_1 = g_2$ . Más sin embargo  $g_1(x_0) = 1 \neq 0 = g_2(x_0)$  y tenemos una contradicción. Por lo tanto,  $f$  es suprayectiva. Si  $f$  es suprayectiva entonces dado  $x \in B$  existe  $y_x \in A$  tal que  $f(y_x) = x$ . Por axioma de elección podemos definir  $g : B \rightarrow A$  dada por  $g(x) = y_x$ , de modo que  $f \circ g = 1_B$ . Por tanto  $f$  es una retracción.

El último inciso implica al primero por la proposición 1.2.2.  $\square$

**Corolario 1.2.1.** *Sea  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$ .  $f$  es un isomorfismo si y solo si  $f$  es una función biyectiva si y solo si  $f$  es un bimorfismo.*

Por las proposiciones 1.2.3 y 1.2.4 es que en **Set** tenemos un recíproco de cada inciso de la proposición 1.2.2. En general, un recíproco de los incisos de la proposición 1.2.2 no es siempre verdadero. Veamos los siguientes contraejemplos.

**Ejemplo 1.2.7.** *El morfismo  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  en **Grp** dado por  $f(n) = n$  es monomorfismo pues es función inyectiva pero no es sección porque si existiera  $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}}$  entonces pasaría que*

$$1 = g(1) = g\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$$

*y así  $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , lo cual es una contradicción.*

**Ejemplo 1.2.8.** *Si  $f : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  es un morfismo en **Grp** dado por  $f([x]_4) = [x]_2$  entonces  $f$  es suprayectivo y por tanto es un epimorfismo. Pero  $f$  no es una retracción pues de existir  $g : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  tal que  $f \circ g = 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$  entonces*

$$[0]_4 = g([0]_2) = g([1]_2) + g([1]_2) = 2g([1]_2)$$

*y de ese modo  $g([1]_2) \in \{[0]_4, [2]_4\}$ . Pero esto último implica  $(f \circ g)([1]_2) = [0]_4 = [1]_4$ , lo cual es imposible.*

**Definición 1.2.3** (Objeto inicial, terminal y cero). *Sea  $\mathcal{C}$  categoría.*

1. *Un objeto  $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  se llama objeto inicial si para cada objeto  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existe un único morfismo  $f$  en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$ .*

2. Un objeto  $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  se llama objeto final si para cada objeto  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existe un único morfismo  $f$  en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ .
3. Un objeto en  $\mathcal{C}$  que es tanto inicial como terminal es un objeto cero en  $\mathcal{C}$ .

**Ejemplo 1.2.9.** Dados  $A$  y  $B$  conjuntos, la cantidad de funciones de  $A$  en  $B$  es  $|B|^{|A|}$  (Este resultado y otros sobre aritmética cardinal pueden consultarse en los capítulos 3 y 5 de [jech2003set]). Por ello es que  $B$  es objeto terminal en **Set** si y sólo si  $B$  es un conjunto unitario  $\{*\}$ . Como cualesquiera dos objetos terminales en **Set** son unitarios entonces son biyectables y por las proposiciones 1.2.3 y 1.2.4 se sigue que son isomorfos en **Set**. Este hecho de que cualesquiera dos objetos terminales son isomorfos es un resultado valido para cualquier categoría.

**Proposición 1.2.5.** Sea  $\mathcal{C}$  categoría. Si  $\mathcal{C}$  tiene objeto inicial/final/cero entonces dichos objetos son únicos salvo isomorfismos.

*Demostración.* Si  $T$  y  $T'$  son objeto terminales de  $\mathcal{C}$  entonces existen únicos elementos  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', T)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T')$ . Por tanto  $f \circ g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T)$ . Como  $1_T \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T)$  y  $|\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T)| = 1$  entonces forzosamente  $1_T = f \circ g$ . De manera similar se demuestra que  $1_{T'} = g \circ f$  y concluimos que  $T \cong T'$ .

La unicidad del objeto inicial, y por tanto del objeto cero, se demuestra de forma parecida.  $\square$

**Ejemplo 1.2.10.** Si  $\{e\}$  es el grupo trivial y  $G$  es cualquier grupo con identidad  $e_G$ . Entonces  $f : G \rightarrow \{e\}$  dada por  $f(g) = e$  es la única función posible de  $G$  a  $\{e\}$  y es en particular el único homomorfismo de grupos posible de  $G$  a  $\{e\}$ . Además, si  $g : \{e\} \rightarrow G$  es homomorfismo de grupos entonces forzosamente  $g(e) = e_G$  y por ello existe un único homomorfismo de grupos de  $G$  a  $\{e\}$ . Se sigue que el grupo trivial  $\{e\}$  es el objeto cero en **Grp**.

**Observación 1.2.2.** Nótese que un objeto inicial en la categoría  $\mathcal{C}$  es un objeto final visto en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  y viceversa. Esta propiedad es un ejemplo de lo que se conoce como dualidad entre dichas categorías.

**Definición 1.2.4** (Categoría pequeña). Una categoría cuya clase de objetos es un conjunto, la llamaremos una categoría pequeña.

**Observación 1.2.3.** Ya que se definieron las categorías usando clases, la categoría **Set** no se puede considerar una categoría pequeña. Por otro lado, la categoría asociada a un conjunto parcialmente ordenado sí es una categoría pequeña.

**Definición 1.2.5.** Si  $\mathcal{C}$  es una categoría tal que para cualquier par de objetos  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  se tiene

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } X \neq Y \\ \{1_X\} & \text{si } X = Y \end{cases}$$

entonces se dice que  $\mathcal{C}$  es una categoría discreta.

**Definición 1.2.6** (Subcategoría). Una subcategoría  $\mathcal{S}$  de una categoría  $\mathcal{C}$  es una categoría tal que:

1.  $Ob(\mathcal{S}) \subset Ob(\mathcal{C})$ .
2. Para cualesquiera  $X, Y \in Ob(\mathcal{S})$  se cumple que

$$Hom_{\mathcal{S}}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

y la ley de composición en  $\mathcal{S}$  es la misma que en  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.2.7** (Subcategoría plena). Una subcategoría  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{C}$  es una subcategoría plena si para cualesquiera  $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$  se cumple que:

$$Hom_{\mathcal{S}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

**Ejemplo 1.2.11** (Categoría de espacios vectoriales). Podemos considerar la categoría de  $K$ -espacios vectoriales  $\mathbf{Vect}_K$  cuyos objetos son  $K$ -espacios vectoriales y sus morfismos son transformaciones  $K$ -lineales con la composición usual de funciones. Dicha categoría tiene a la categoría de  $K$ -espacios vectoriales finitos  $\mathbf{Vect}_K^f$  como subcategoría plena.

**Ejemplo 1.2.12** (Categoría de grupos abelianos). Podemos considerar a la categoría de grupos abelianos  $\mathbf{Ab}$  cuyos objetos son grupos abelianos y sus morfismos son homomorfismos entre grupos abelianos. Dicha categoría es una subcategoría plena de  $\mathbf{Grp}$ .

**Ejemplo 1.2.13** (Categoría de espacios Hausdorff compactos). Podemos considerar a la categoría de espacios Hausdorff compactos  $\mathbf{CHaus}$  cuyos objetos son espacios topológicos  $T_2$  compactos y sus morfismos son funciones continuas entre dichos espacios. Esta categoría es una subcategoría plena de  $\mathbf{Top}$ .

**Definición 1.2.8** (Funtor covariante). Un funtor covariante de una categoría  $\mathcal{C}$  a una categoría  $\mathcal{D}$ , denotado como  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , consiste de las siguientes correspondencias:

1. Para cada objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$ ,  $F$  le asigna un único objeto de  $\mathcal{D}$ , denotado  $F(X)$ .
2. Para cada morfismo  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $F$  le asigna un único morfismo en  $Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ , denotado  $F(f)$ .

y además satisface lo siguiente:

1. Para cada objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$  se tiene que

$$F(1_X) = 1_{F(X)}$$

2. Para cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  se cumple que

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

**Definición 1.2.9** (Functor contravariante). *Un functor contravariante de una categoría  $\mathcal{C}$  a una categoría  $\mathcal{D}$ , denotado como  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , consiste en las siguientes correspondencias:*

1. Para cada objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$ ,  $F$  le asigna un único objeto en  $\mathcal{D}$ , denotado  $F(X)$ .
2. Para cada morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $F$  le asigna un único morfismo en  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$ , denotado  $F(f)$ .

y además satisface lo siguiente:

1. Para cada objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$  se tiene que

$$F(1_X) = 1_{F(X)}$$

2. Para cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  se cumple que

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

**Observación 1.2.4.** *Un functor covariante de  $\mathcal{C}^{op}$  a  $\mathcal{D}$  resulta ser contravariante visto como functor de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$ . Y viceversa, un functor contravariante de  $\mathcal{C}^{op}$  a  $\mathcal{D}$  es functor covariante visto como functor de  $\mathcal{D}$  a  $\mathcal{C}$ . De aquí que se diga que functor covariante y functor contravariante son conceptos duales. La observación 1.2.2 nos dice que objeto inicial y objeto terminal también son conceptos duales.*

**Proposición 1.2.6.** *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor. Si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  es un isomorfismo entonces  $F(f)$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* Se hará aquí el caso con  $F$  covariante pues el contravariante es similar. Por la definición 1.2.2 existe un morfismo  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tal que  $g \circ f = 1_X$  y  $f \circ g = 1_Y$ . Como consecuencia del segundo inciso de la definición 1.2.8 se sigue que  $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$  y  $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(1_Y) = 1_{F(Y)}$ . Por lo tanto  $F(f)$  es un isomorfismo.  $\square$

Si  $F$  es un functor entonces a veces acortaremos  $F(X)$  mediante  $FX$ . Procedemos a dar ejemplos de funtores.

**Ejemplo 1.2.14** (Functor identidad). *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. El functor identidad de  $\mathcal{C}$  es  $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que:*

1. Envía cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  a  $\text{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ .

2. Envía cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  a  $\text{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ .

**Ejemplo 1.2.15** (Funtor olvido). El funtor olvido en **Top** es  $U_{\text{Top}} : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$  tal que:

1. Envía cada  $X \in \text{Ob}(\text{Top})$  al conjunto  $U_{\text{Top}}(X) = X$ .
2. Envía cada  $f \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$  a la función  $U_{\text{Top}}(f) = f$ .

Y de forma análoga se define el funtor olvido para estructuras algebraicas como podría ser  $U_{\text{Grp}}$ .

**Ejemplo 1.2.16** (Funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ ). Sea  $\mathcal{C}$  categoría con  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  fijo. El funtor covariante  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  es tal que

1. Envía cada  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  al conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .
2. Envía cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  a la función pre-composición  $f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$  dada por  $f_*(g) = f \circ g$ .

**Ejemplo 1.2.17** (Funtor representable). Sea  $\mathcal{C}$  categoría y  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . El funtor representable es el funtor  $K_X : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  tal que:

1. Envía cada  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  al conjunto  $K_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ .
2. Envía cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  a la función post-composición  $f^* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  dada por  $f^*(g) := g \circ f$ .

**Ejemplo 1.2.18** (Funtor constante). Si  $*$  es un conjunto, definimos  $\Delta_* : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  como el funtor tal que

1. Envía cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  al conjunto  $*$ .
2. Envía cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  a la función identidad de  $*$ . Es decir,  $\Delta_*(f) = 1_*$ .

**Ejemplo 1.2.19** (Funtor diagonal). Sea  $\mathcal{C}$  categoría. Definimos el funtor diagonal en  $\mathcal{C}$ , denotado  $\Delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ , como el funtor tal que:

1. Envía cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  a  $\Delta_{\mathcal{C}}(X) = (X, X)$ .
2. Envía cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  a  $\Delta_{\mathcal{C}}(f) = (f, f)$ .

**Ejemplo 1.2.20** (Producto de funtores). Sean  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$  funtores covariantes. Definimos el producto de los funtores  $F$  y  $G$  como el funtor  $F \times G : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D} \times \mathcal{D}'$  tal que:

1. Envía cada  $(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}')$  a  $(F(X), G(Y))$ .
2. Envía cada  $(f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}'}((X, Y), (X', Y'))$  a  $(F(f), G(g))$ .

**Definición 1.2.10** (Funtor fiel y pleno). Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtor covariante y para cada  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , la función  $F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$  dada por  $F_{X,Y}(f) = F(f)$ .

1. Si para cada  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  se tiene que  $F_{X,Y}$  es inyectiva entonces se dice que  $F$  es un funtor fiel.
2. Si para cada  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  se tiene que  $F_{X,Y}$  es suprayectiva entonces se dice que  $F$  es un funtor pleno.

**Definición 1.2.11** (Transformación natural covariante). Sean  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores covariantes. Una transformación natural  $\eta$  de  $F$  a  $G$ , denotado como  $\eta : F \rightarrow G$ , es una colección de morfismos  $\eta = \{\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  en  $\mathcal{D}$  tales que para cualquier  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  se tiene

$$\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X \quad (1.1)$$

En otras palabras (1.1) es equivalente a pedir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array}$$

En caso de que cada  $\eta_X$  en  $\eta$  sea un isomorfismo decimos que  $\eta$  es un isomorfismo natural.

Se define de forma análoga el concepto de transformación natural entre funtores contravariantes.

**Ejemplo 1.2.21.** Sea el funtor  $** : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$  que asigna a cada  $K$ -espacio vectorial  $V$  su doble dual  $V^{**}$  y a cada transformación  $K$ -lineal  $f : V \rightarrow W$  le asigna la transformación doble dual  $f^{**} : V^{**} \rightarrow W^{**}$ . Entonces la colección  $\eta = \{\eta_V : V \rightarrow V^{**}\}_{V \in \text{Ob}(\mathbf{Vect}_K)}$  con  $\eta_V(v) = \hat{v}$  y  $\hat{v} : V^* \rightarrow K$  dada por  $\hat{v}(\phi) = \phi(v)$ , es una transformación natural entre los funtores  $\text{Id}_{\mathbf{Vect}_K}$  y  $**$ , puesto que dada una transformación natural  $f : V \rightarrow W$ , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\eta_V} & V^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ W & \xrightarrow{\eta_W} & W^{**} \end{array}$$

Además, si restringimos los funtores a la subcategoría  $\mathbf{Vect}_K^f$ , se tiene que  $\eta$  es un isomorfismo natural.

**Definición 1.2.12** (Composición vertical). Sean  $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores y  $\alpha : F \rightarrow G$ ,  $\beta : G \rightarrow H$  transformaciones naturales. Definimos la transformación natural composición vertical  $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$  como  $\{\beta_A \circ \alpha_A\}_{A \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ .

**Definición 1.2.13** (Categoría de funtores). Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías. Definimos la categoría  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  como aquella tal que  $\text{Ob}(\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})) := \{F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : F \text{ es funtor}\}$  y  $\text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}(F, G) := \text{Nat}(F, G) := \{\eta : F \rightarrow G : \eta \text{ es transformación natural}\}$  tiene por regla de composición la composición vertical.

### 1.3. Adjuntos, límites y equivalencias de categorías

Varios de los objetos que aparecen en matemáticas satisfacen alguna propiedad que es universal en el sentido de que si otro objeto satisface dicha propiedad entonces debe ser isomorfo al objeto que teníamos en principio. Trabajar mediante objetos definidos por propiedades universales, una vez que aseguramos su existencia, es a veces más cómodo que trabajar con la construcción explícita. En esta sección veremos que, ligados a objetos con propiedades universales hallaremos a los llamados funtores adjuntos y a los límites de funtores.

Finalmente, definiremos cuando dos categorías son equivalentes, lo cual significa que es indistinto estudiar una de otra. Veremos más adelante que los teoremas de Lie establecen una cierta equivalencia de categorías.

**Definición 1.3.1** (Objeto universal). Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor covariante y  $B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ . Un objeto universal de  $B$  a  $F$  es una pareja  $(A_B, u_B : B \rightarrow F(A_B))$  en  $\mathcal{D}$  tal que para cualquier morfismo  $f : B \rightarrow F(A')$  en  $\mathcal{D}$  existe un único morfismo  $h : A_B \rightarrow A'$  en  $\mathcal{C}$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_B} & F(A_B) \\ & \searrow f & \downarrow F(h) \\ & & F(A') \end{array}$$

**Proposición 1.3.1** (Los objetos universales son únicos). Un objeto universal es único salvo isomorfismos.

*Demostración.* Sean  $(A_B, u_B)$  y  $(A'_B, u'_B)$  objetos universales de  $B$  para  $F$ . Entonces por definición 1.3.1 existen dos únicos morfismos  $f : A_B \rightarrow A'_B$  y  $f' : A'_B \rightarrow A_B$  tales que

$$\begin{aligned} F(f) \circ u_B &= u'_B \\ F(f') \circ u'_B &= u_B \end{aligned}$$

Al sustituir en las igualdades anteriores y de la definición de funtor 1.2.8 obtenemos

$$\begin{aligned} u'_B &= F(f) \circ u_B = F(f) \circ F(f') \circ u'_B = F(f \circ f') \circ u'_B \\ u'_B &= 1_{F(A_B)} \circ u'_B = F(1_{A_B}) \circ u'_B \end{aligned}$$

pero de la definición 1.3.1 tenemos que  $u'_B$  se factoriza a través de  $u_B$  de manera única. De la igualdad anterior obtenemos que  $f \circ f' = 1_{A'_B}$ . De manera análoga, se tiene la otra igualdad  $f' \circ f = 1_{A_B}$ , mostrando que  $f$  es isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u_B} & F(A_B) \\ & \searrow u'_B & \uparrow F(f') \\ & & F(A'_B) \end{array}$$

□

**Ejemplo 1.3.1** (Compactación de Stone-Čech). Sea  $U : \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  el funtor tal que:

1. Envía cada  $X \in \text{Ob}(\mathbf{CHaus})$  a  $U(X) = X$ .
2. Envía cada  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{CHaus}}(X, Y)$  a  $U(f) = f$ .

Dado  $X \in \text{Ob}(\mathbf{Top})$ , el objeto universal de  $X$  a  $U$  es una pareja  $(\beta X, i_X : X \rightarrow \beta X)$  con  $\beta X \in \text{Ob}(\mathbf{CHaus})$  tal que, para cualquier función continua  $f : X \rightarrow Y$ , existe una única función continua  $h : \beta X \rightarrow Y$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & \beta X \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & Y \end{array} \quad (1.2)$$

El diagrama 1.2 nos dice que el objeto universal de  $X$  a  $U$  es, por definición, su compactación de Stone-Čech  $\beta X$ .

**Definición 1.3.2** (Funtores adjuntos). Sean dos funtores covariantes  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ . Se dice que la pareja ordenada  $(F, G)$  es una adjunción, o que  $F$  y  $G$  son funtores adjuntos con  $F$  adjunto izquierdo y  $G$  adjunto derecho, si para cualesquiera  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  tenemos un isomorfismo

$$\Phi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

de modo que la familia de las biyecciones son binaturales en el sentido de que el siguiente diagrama conmuta para cualesquiera  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', Y)$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) & \xrightarrow{\Phi_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \\ \text{Hom}(Ff, g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(f, Gg) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', Y') & \xrightarrow{\Phi_{X',Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GY') \end{array}$$

donde  $\text{Hom}(Fg, f) := K_{X'}(fg) \circ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FY, \cdot)(f)$  y  $\text{Hom}(g, GF) := K_{GX'}(g) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \cdot)(GF)$

**Proposición 1.3.2.** Si el funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tiene adjunto derecho  $G$  entonces dicho adjunto es único salvo isomorfismos.

*Demostración.* Sea  $H$  otro adjunto derecho de  $F$ . Entonces por definición 1.3.2 ocurre el isomorfismo binatural  $Hom_{\mathcal{C}}(Y, G(X)) \cong Hom_{\mathcal{D}}(F(Y), X) \cong Hom_{\mathcal{C}}(Y, H(X))$  para todo  $Y \in Ob(\mathcal{C})$  y  $X \in Ob(\mathcal{D})$  y en particular existe  $\theta_D : GD \rightarrow HD$  tal que

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(GD, GD) & \xrightarrow{(\theta_D)_*} & Hom_{\mathcal{C}}(GD, HD) \\ (Gf)_* \downarrow & & \downarrow (Hf)_* \\ Hom_{\mathcal{C}}(GD, GE) & \xrightarrow{(\theta_E)_*} & Hom_{\mathcal{C}}(GD, HE) \end{array} \quad (1.3)$$

conmuta para todo  $f \in Hom_{\mathcal{D}}(D, E)$ . En especial cuando se evalúa el diagrama 1.3 en  $1_{GD}$  tenemos que para toda  $f \in Hom_{\mathcal{D}}(D, E)$  el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} GD & \xrightarrow{\theta_D} & HD \\ Gf \downarrow & & \downarrow Hf \\ GE & \xrightarrow{\theta_E} & HE \end{array}$$

Concluimos que los funtores  $G$  y  $H$  son isomorfos.  $\square$

**Ejemplo 1.3.2.** Sea  $D : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$  el funtor que asigna a cada conjunto  $X$  el espacio topológico discreto  $(X, \mathbb{P}(X))$ , y sea  $I : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$  el funtor que asigna a cada conjunto  $X$  el espacio topológico indiscreto  $(X, \{\emptyset, X\})^1$ . Entonces se tiene:

$$Hom_{\mathbf{Set}}(X, U_{\mathbf{Top}}((Y, \tau))) = Hom_{\mathbf{Top}}(D(X), (Y, \tau))$$

$$Hom_{\mathbf{Set}}(U_{\mathbf{Top}}((Y, \tau)), X) = Hom_{\mathbf{Top}}((Y, \tau), I(X))$$

Las igualdades previas implican que  $D$  es funtor adjunto izquierdo del funtor olvido  $U_{\mathbf{Top}}$ , y que  $I$  es funtor adjunto derecho de  $U_{\mathbf{Top}}$ .

**Proposición 1.3.3.** Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtor. Para todo  $X \in Ob(\mathcal{D})$  existe un objeto universal de  $X$  a  $F$  si y solo si existe un funtor adjunto izquierdo  $G$  para  $F$ .

*Demostración.* Supongamos que para todo  $X \in Ob(\mathcal{D})$  existe un objeto universal  $(A_X, u_X : X \rightarrow F(A_X))$  de  $X$  a  $F$ . Si  $f \in Hom_{\mathcal{D}}(X, Y)$  entonces por la definición 1.3.1 de objeto universal existe una única función  $\hat{f} \in Hom_{\mathcal{C}}(A_X, A_Y)$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u_X} & F(A_X) \\ f \downarrow & & \downarrow F(\hat{f}) \\ Y & \xrightarrow{u_Y} & F(A_Y) \end{array}$$

---

<sup>1</sup>Funciones entre espacios discretos y funciones entre espacios indiscretos siempre son continuas.

Utilizando el axioma de elección podemos definir el funtor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  con las siguientes asignaciones:

1. Envía cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  a  $G(X) = A_X$ .
2. Envía cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$  a  $G(f) = \hat{f}$ .

Vamos a corroborar que en efecto  $G$  es un funtor. Si tomamos  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z)$  entonces del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u_X} & F(A_X) \\
 \downarrow f & & \downarrow F(\hat{f}) \\
 Y & \xrightarrow{u_Y} & F(A_Y) \\
 \downarrow g & & \downarrow F(\hat{g}) \\
 Z & \xrightarrow{u_Z} & F(A_Z)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{g} \circ \text{f} \text{ (curved arrow from } X \text{ to } Z \text{)} \\
 F(\hat{g})F(\hat{f}) = F(\hat{g} \circ \hat{f}) \text{ (curved arrow from } F(A_X) \text{ to } F(A_Z) \text{)}
 \end{array}
 \quad (1.4)$$

y de la construcción de  $G$  se sigue que debe ocurrir que  $G(g \circ f) = \widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f} = G(g) \circ G(f)$ . Similarmente obtenemos que  $G(1_X) = 1_{G(X)}$  para todo  $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ . Ahora bien, el cuadrado superior del diagrama 1.4 nos dice que  $u = \{u_X : X \rightarrow F(A_X) = (F \circ G)(X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{D})}$  es una transformación natural de  $\text{Id}_{\mathcal{D}}$  a  $F \circ G$ . Luego para cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  y  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  definimos la función

$$U_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X), Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y))$$

dada por  $U_{X,Y}(f) = F(f) \circ u_X$ . La función  $U_{X,Y}$  es biyectiva pues por definición 1.3.1 de objeto universal, para cada  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y))$  existe un único  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X), Y)$  tal que

$$F(f) \circ u_X = g$$

Además,  $U_{X,Y}$  es biyección binatural.

Conversamente, si  $F, G$  son funtores adjuntos entonces para cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  tenemos un isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X), G(X)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(G(X)))$$

que envía  $1_{G(X)}$  a un  $\eta_X : X \rightarrow F(G(X))$ . Afirimo que  $(G(X), \eta_X)$  es el objeto universal de  $X$  a  $F$  pues si tenemos  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y  $f : X \rightarrow F(Y)$  entonces de la biyección  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X), Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y))$  existe un único  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X), Y)$  que es enviado bajo la biyección a  $f$ . Ahora,

de la naturalidad de la biyección se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X), G(X)) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(G(X))) \\ h_* \downarrow & & \downarrow F(h)_* \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X), Y) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y)) \end{array}$$

el cual cuando se aplica a  $1_{G(X)} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X), G(X))$  implica que  $f = F(h) \circ \eta_X$ . Y por construcción, el  $h$  que nos proporciona la igualdad anterior es único. Concluimos que  $(G(X), \eta_X)$  es el objeto universal de  $X$  y que por tanto  $F$  tiene objetos universales.  $\square$

Ahora pasaremos a hablar de límites de funtores.

**Definición 1.3.3** (Cono). *Un cono para el funtor covariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  consta de un objeto  $N \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  junto con una familia de morfismos  $\{\phi_X : N \rightarrow F(X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  tal que para cualquier morfismo  $f : X \rightarrow Y$  se cumple que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \phi_X \swarrow & & \searrow \phi_Y \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

**Definición 1.3.4** (Límite). *Un límite para el funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un cono  $(L, \{\phi_X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$  tal que para cualquier otro cono  $(N, \{\psi_X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$  existe un único morfismo  $u : N \rightarrow L$  tal que*

$$\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) (\phi_X \circ u = \psi_X)$$

Se suele denotar al límite del funtor  $F$  como  $\lim_{i \in \text{Ob}(I)} F(i)$

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \psi_X \swarrow & \downarrow u & \searrow \psi_Y \\ & L & \\ \phi_X \swarrow & & \searrow \phi_Y \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

**Observación 1.3.1.** *El objeto dual del límite es el llamado colímite, que se denota  $\text{colim } F$ .*

**Proposición 1.3.4** (El límite es único). *El límite de un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , en caso de existir, es único salvo isomorfismos.*

*Demostración.* Supongamos que  $(L, \phi_X)$  es un límite para el funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Si  $(L', \{\phi'_X\})$  es otro límite para  $F$  entonces de la definición 1.3.4 existen dos morfismos  $u : L' \rightarrow L$  y  $u' : L \rightarrow L'$  tales que

$$\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) (\phi_X \circ u = \phi'_X \quad \wedge \quad \phi'_X \circ u' = \phi_X)$$

$$\begin{array}{ccc}
L & \begin{array}{c} \xleftarrow{u'} \\ \xleftarrow{u} \end{array} & L' \\
& \searrow \phi_X \quad \swarrow \phi'_X & \\
& F(X) &
\end{array}$$

y esto implica que  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})(\phi_X \circ (u \circ u') = \phi_X = \phi_X \circ \text{Id}_L)$ . Pero de la unicidad del morfismo según la definición 1.3.4 se sigue que  $u \circ u' = 1_L$ . De manera análoga se tiene que  $u' \circ u = 1_{L'}$ . Por tanto  $u$  es un isomorfismo y  $L'$  es isomorfo a  $L$ .  $\square$

**Definición 1.3.5** (Categoría completa). *La categoría  $\mathcal{C}$  es completa si para todo funtor  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ , con  $I$  con categoría pequeña, existe el límite de  $F$ .*

**Observación 1.3.2.** *Si  $I$  es categoría pequeña como en la definición 1.3.5 entonces se acostumbra a llamar a  $I$  un conjunto de índices y no nos importan sus objetos. Por ello acostumbramos a acortar  $i \in \text{Ob}(I)$  mediante  $i \in I$*

**Ejemplo 1.3.3** (Producto). *Sea  $\mathcal{C}$  categoría discreta con  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$ . Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un funtor tal que  $F(1) = X_1$  y  $F(2) = X_2$  entonces el límite de  $F$  es un único  $X_1 \times X_2 \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  junto a dos morfismos  $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow F(1)$  y  $\pi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$  tales que si tenemos el objeto  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  con dos morfismos  $f_1 : Y \rightarrow X_1$  y  $f_2 : Y \rightarrow X_2$  entonces existe un único morfismo  $f : Y \rightarrow X_1 \times X_2$  que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccc}
& & Y & & \\
& \swarrow f_1 & \downarrow f & \searrow f_2 & \\
X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & X_1 \times X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2
\end{array} \tag{1.5}$$

Llamamos a  $X_1 \times X_2$  el producto de  $X_1$  y  $X_2$ . Los morfismos  $\pi_i$ , con  $i \in \{1, 2\}$ , se conocen como proyecciones. Podemos hacer el producto de una cantidad arbitraria de objetos de  $\mathcal{D}$  si consideramos el límite del funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  con  $\mathcal{C}$  categoría discreta ya no necesariamente de solo dos objetos. Al único morfismo de  $Y$  a  $\prod_{i \in I} X_i$  inducido por  $\{f_i : Y \rightarrow X_i\}_{i \in I}$  se le suele denotar por  $(f_i)_{i \in I}$ .

La existencia de un único morfismo que hace conmutar el diagrama 1.5 se conoce como la propiedad universal del producto.

**Definición 1.3.6** (Categoría con productos). *La categoría  $\mathcal{C}$  tiene productos si todo funtor  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ , con  $I$  categoría discreta pequeña, tiene límite.*

**Ejemplo 1.3.4** (Igualador). *Sea  $I$  categoría con  $\text{Ob}(I) = \{1, 2\}$  y  $\text{Hom}_I(1, 2) := \{\alpha, \beta\}$  sus morfismos no triviales. Si  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$  es funtor tal que  $F(1) = A$ ,  $F(2) = B$ ,  $F(\alpha) = f$  y  $F(\beta) = g$  entonces el límite  $(E, \text{eq})$  de  $F$  se denota  $\text{Eq}(f, g)$  y se conoce como el igualador de los morfismos  $f$  y  $g$ . Por definición 1.3.4, si  $(O, m : O \rightarrow A)$  es una pareja tal que  $f \circ m = g \circ m$  entonces existe*

un único  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(O, E)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{eq} & X & \xrightleftharpoons[g]{f} & Y \\ \uparrow f & & \nearrow m & & \\ O & & & & \end{array} \quad (1.6)$$

La existencia de un único morfismo que hace conmutar el diagrama 1.6 se conoce como la propiedad universal del igualador.

**Observación 1.3.3.** El objeto dual del producto es el coproducto, mientras que el objeto dual del igualador es el coigualador.

**Definición 1.3.7** (Categoría con igualadores). Se dice que la categoría  $\mathcal{C}$  tiene igualadores si para cualquier par de objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y cualquier par de morfismos entre ellos  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  existe su igualador  $Eq(f, g)$ .

**Proposición 1.3.5.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría.  $\mathcal{C}$  es completa si y solo si  $\mathcal{C}$  admite productos e igualadores.

*Demostración.* Si  $\mathcal{C}$  es completa entonces existe el límite de cualquier funtor  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$  con  $I$  categoría pequeña. En particular  $\mathcal{C}$  tiene productos e igualadores.

Conversamente, supongamos que  $\mathcal{C}$  admite productos e igualadores. Sea el funtor  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$  con  $I$  categoría pequeña y definamos el conjunto

$$\text{Hom}(I) := \bigcup_{i, j \in I} \text{Hom}_I(i, j)$$

Sea  $(E, eq)$  el igualador de los morfismos  $s, t : \prod_{i \in I} F(i) \rightarrow \prod_{f \in \text{Hom}(I)} F(\text{cod}(f))$  dados por

$$\begin{aligned} s &= (F(f) \circ \pi_{\text{dom}(f)})_{f \in \text{Hom}(I)} \\ t &= (\pi_{\text{cod}(f)})_{f \in \text{Hom}(I)} \end{aligned}$$

La pareja  $(E, \{\pi_i \circ eq\}_{i \in I})$  es cono de  $F$  pues si  $f \in \text{Hom}(I)$  entonces de la igualdad  $s \circ eq = t \circ eq$  se sigue que  $F(f) \circ (\pi_{\text{dom}(f)} \circ eq) = \pi_{\text{cod}(f)} \circ eq$ .

Dado  $(N, \{\psi_i\}_{i \in I})$  cono de  $F$  y  $\psi := (\psi_i)_{i \in I}$  entonces para  $f \in \text{Hom}(I)$  se satisface  $F(f) \circ \psi_{\text{dom}(f)} = \psi_{\text{cod}(f)}$  y por tanto  $F(f) \circ \pi_{\text{dom}(f)} \circ \psi = \pi_{\text{cod}(f)} \circ \psi$ . Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\psi} & \prod_{i \in I} F(i) \xrightleftharpoons[s]{t} \prod_{g \in \text{Hom}(I)} F(\text{cod}(g)) \\ & & \downarrow \pi_{\text{dom}(f)} \quad \searrow \pi_{\text{cod}(f)} \quad \downarrow \pi_f \\ & & F(i) \xrightarrow{F(f)} F(j) \end{array} \quad (1.7)$$

El diagrama 1.7 muestra que los morfismos  $t \circ \psi$  y  $s \circ \psi$  satisfacen la propiedad universal del producto  $\prod_{g \in \text{Hom}(I)} F(\text{cod}(g))$ . Por unicidad debe darse la igualdad  $s \circ \psi = t \circ \psi$ .

Luego, por propiedad universal del igualador, existe un único morfismo  $h : N \rightarrow E$  tal que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{eq} & \prod_{i \in I} F(i) \xrightleftharpoons[s]{t} \prod_{f \in \text{Hom}(I)} F(\text{cod}(f)) \\ \uparrow h & \nearrow \psi & \\ N & & \end{array}$$

y en particular,  $h : N \rightarrow E$  es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & \psi_i \swarrow & \downarrow h & \searrow \psi_j & \\ & & E & & \\ & \pi_i \circ eq \swarrow & & \searrow \pi_j \circ eq & \\ F(i) & \xrightarrow{F(f)} & & & F(j) \end{array}$$

para todo  $f \in \text{Hom}_I(i, j)$ . Se concluye que  $(E, \{\pi_i \circ eq\}_{i \in I})$  es el límite de  $F$ .  $\square$

**Corolario 1.3.1.** *Las categorías **Set**, **Grp** y **Top** son completas.*

*Demostración.* Usaremos la proposición 1.3.5. El producto en **Set** viene a ser el producto usual de conjuntos, en **Grp** es el producto directo de grupos y en **Top** es el producto de los espacios topológicos equipado con la topología producto. Los tres productos mencionados satisfacen la propiedad universal del producto. Solo resta dar a conocer la existencia del igualador en los tres casos.

Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son funciones entonces definimos al conjunto

$$Eq(f, g) := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

y a la inclusión  $i : Eq(f, g) \rightarrow X$  dada por  $i(x) = x$ . Afirmando que  $(Eq(f, g), i)$  es el igualador de  $f, g$  en **Set** pues por definición  $f \circ i = g \circ i$  y si  $h : Z \rightarrow X$  es función tal que  $f \circ h = g \circ h$  entonces imponer  $i \circ u = h$  conduce a que  $u = h$  y forzosamente  $u : Z \rightarrow Eq(f, g)$  dado por  $u(x) = h(x)$  es la única función entre  $Z$  y  $Eq(f, g)$  que nos da un diagrama de la forma 1.6. Por tanto **Set** tiene igualadores.

Si  $f, g$  fueran homomorfismos de grupos entonces  $Eq(f, g)$  constituye un subgrupo del grupo  $X$ ,  $i$  es un homomorfismo de grupos y de existir  $h : Z \rightarrow X$  homomorfismo de grupos que cumpla la propiedad del igualador entonces nuevamente  $u : Z \rightarrow Eq(f, g)$  dado por  $u(x) = h(x)$  es el único morfismo de grupos que nos da el diagrama conmutativo. Luego, **Grp** tiene igualadores. Similarmente, si  $f, g$  son funciones continuas entonces  $Eq(f, g)$  equipado con la topología de subespacio y la inclusión  $i$  es el igualador de  $f$  y  $g$  en **Top**.  $\square$

**Proposición 1.3.6** (El límite es continuo). *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtor covariante y  $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ . Si  $F$  tiene límite, entonces*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \lim F) \cong \lim(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(\cdot)))$$

*Demostración.* Sea  $(L, \{\pi_Y : L \rightarrow F(Y)\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$  límite de  $F$ . Entonces  $(\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L), \{(\pi_Y)_* : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y))\})$  es un cono para  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot) \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  pues como  $L$  es límite de  $F$  entonces para cualquier  $f : Y \rightarrow Z$  se tiene  $F(f) \circ \pi_Y = \pi_Z$  y por tanto para cualquier  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L)$  se tiene  $(F(f)_* \circ (\pi_Y)_*)(g) = F(f) \circ \pi_Y \circ g = \pi_Z \circ g = (\pi_Z)_*(g)$ .

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \pi_Y \swarrow & & \searrow \pi_Z \\ F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(Z) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L) & \\ (\pi_Y)_* \swarrow & & \searrow (\pi_Z)_* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y)) & \xrightarrow{F(f)_*} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Z)) \end{array}$$

Ahora bien, si  $(N, \{\phi_Y : N \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y))\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})})$  es otro cono para  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot) \circ F$  entonces dado  $x \in N$  tenemos una familia  $\{\phi_Y(x) : X \rightarrow F(Y)\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  que constituye un cono para  $F$  puesto que al ser  $N$  cono se cumple que para cualquier  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  se tiene  $F(f) \circ \phi_Y(x) = F(f)(\phi_Y(x)) = (F(f)_* \circ \phi_Y)(x) = \phi_Z(x)$ .

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \phi_Y \swarrow & & \searrow \phi_Z \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y)) & \xrightarrow{F(f)_*} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Z)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ \phi_Y(x) \swarrow & & \searrow \phi_Z(x) \\ F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(Z) \end{array}$$

Pero como  $L$  es límite de  $F$  entonces existe un único  $h_x : X \rightarrow L$  tal que  $\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}) (\pi_Y \circ h_x = \phi_Y(x))$ . Por lo tanto podemos definir una función  $h : N \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L)$  dada por  $h(x) = h_x$ . Nótese que por construcción,  $h$  es el único morfismo que hace conmutar el diagrama que se muestra debajo a la derecha

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_x} & L \\ & \searrow \phi_Y(x) & \downarrow \pi_Y \\ & & F(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{h} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L) \\ & \searrow \phi_Y & \downarrow (\pi_Y)_* \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(Y)) \end{array}$$

Concluimos que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, L)$  es límite de  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot) \circ F$ . Como la proposición 1.3.4 nos dice que el límite es único salvo isomorfismos entonces debe suceder que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \lim F) \cong \lim \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, F(\cdot))$ .  $\square$

**Corolario 1.3.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  categoría con productos,  $I$  conjunto de índices y  $\{X\} \cup \{X_i\} \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Entonces*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \prod_{i \in I} X_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i)$$

*Demostración.* Basta aplicar la proposición 1.3.6 al ejemplo 1.3.3.  $\square$

Finalizamos con las equivalencias de categorías.

**Definición 1.3.8** (Equivalencia de categorías). *Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es una equivalencia de categorías si existe  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  junto a  $\alpha : F \circ G \rightarrow Id_{\mathcal{D}}$  y  $\beta : G \circ F \rightarrow Id_{\mathcal{C}}$  isomorfismos naturales. En caso de existir tal funtor decimos que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías equivalentes.*

**Definición 1.3.9** (Funtor esencialmente suprayectivo). *Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es esencialmente suprayectivo si para todo objeto  $D \in Ob(\mathcal{D})$  existe un objeto  $C \in Ob(\mathcal{C})$  tal que  $FC \cong D$ .*

**Ejemplo 1.3.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  categoría discreta con  $Ob(\mathcal{C}) = \{c\}$  y  $\mathcal{D}$  categoría con  $Ob(\mathcal{D}) = \{d_1, d_2\}$  y cuyos únicos morfismos no triviales son  $\alpha : d_1 \rightarrow d_2$  y  $\beta : d_2 \rightarrow d_1$  de tal modo que  $d_1, d_2$  son isomorfismos. Entonces  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías equivalentes pues podemos construir el funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  dado por  $F(c) = d_1$  y al funtor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  dado por  $G = \Delta_{\{c\}}$ . Nótese que la equivalencia  $F$  es fiel, plena y esencialmente suprayectiva.*

**Proposición 1.3.7.** *Sea un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .  $F$  es equivalencia de categorías si y solo si  $F$  es fiel, pleno y esencialmente suprayectivo.*

*Demostración.* Si  $F$  es equivalencia de categorías entonces dado  $D \in Ob(\mathcal{D})$  se tiene el isomorfismo  $F(G(D)) \cong D$ , de modo que  $F$  es esencialmente suprayectivo. Si  $G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}}$  mediante el isomorfismo natural  $\{\eta_X : G(F(X)) \rightarrow X\}_{X \in Ob(\mathcal{C})}$  entonces, dados  $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ , por la naturalidad se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{\eta_X} & X \\ G(F(f)) \downarrow & & \downarrow f \\ G(F(Y)) & \xrightarrow{\eta_Y} & Y \end{array} \quad (1.8)$$

$F_{X,Y}$  es inyectiva pues si  $F(f) = F(g)$  para  $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$  entonces por el diagrama 1.8 sucede que  $G(F(f)) = \eta_Y^{-1} \circ f \circ \eta_X = \eta_Y^{-1} \circ g \circ \eta_X = G(F(g))$  y por lo tanto, ya que cada  $\eta_X$  es un isomorfismo, ocurre que  $f = g$ . Para ver que  $F_{X,Y}$  es suprayectiva, si  $g \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ , definimos

$$f = \eta_Y \circ G(g) \circ \eta_X^{-1}$$

y notamos que por diagrama 1.8

$$G(F(f)) = G(F(\eta_Y)) \circ G(F(G(g))) \circ G(F(\eta_X^{-1})) \quad (1.9)$$

pero por naturalidad  $G(F(\eta_X^{-1})) \circ \eta_X^{-1} = \eta_{G(F(X))}^{-1} \circ \eta_X^{-1}$  y ello implica que  $G(F(\eta_X^{-1})) = \eta_{G(F(X))}^{-1}$ . Similarmente,  $G(F(\eta_Y^{-1})) = \eta_{G(F(Y))}^{-1}$  y sustituyendo en 1.9

$$G(F(f)) = \eta_{G(F(Y))} \circ G(F(G(g))) \circ \eta_{G(F(X))}^{-1} \quad (1.10)$$

Nuevamente por naturalidad  $G(F(G(g))) \circ \eta_{G(F(X))}^{-1} = \eta_{G(F(Y))}^{-1} \circ G(g)$  y sustituyendo en 1.10 se

tiene

$$G(F(f)) = G(g)$$

Puede demostrarse que  $G_{FX,FY}$  es inyectivo, de manera parecida a como se demuestra que  $F_{X,Y}$  lo es. Se concluye que  $F_{X,Y}(f) = F(f) = g$  y por tanto  $F_{X,Y}$  es suprayectivo.

Conversamente, si  $F$  es fiel, pleno y esencialmente suprayectivo entonces dado  $X \in Ob(\mathcal{D})$  existe  $X' \in Ob(\mathcal{C})$  tal que  $\eta_X : F(X') \rightarrow X$  es isomorfismo. Asumiendo axioma de elección es posible definir el funtor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  dado por  $G(X) = X'$  y que, en virtud de que  $f$  sea fiel y pleno, manda al morfismo  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$  al único morfismo  $f' \in Hom_{\mathcal{D}}(F(G(X)), F(G(Y)))$  tal que  $F(f') = \eta_Y^{-1} \circ f \circ \eta_X$  y por tanto se obtiene el diagrama 1.8, concluyendo que  $\{\eta_X\}_{X \in Ob(\mathcal{D})}$  es isomorfismo natural entre  $F \circ G$  y  $Id_{\mathcal{D}}$ . Por como se definió,  $G$  también es fiel y pleno, y de aquí se puede hallar, de manera muy similar a como lo hicimos, el isomorfismo natural  $G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}}$  y así  $F$  es equivalencia de categorías.  $\square$

## 1.4. Lema de Yoneda

El lema de Yoneda es poderoso por sus implicaciones. Particularmente veremos que toda categoría  $\mathcal{C}$  es equivalente a una subcategoría de  $Fun(\mathcal{C}^{op}, Set)$ , de modo que estudiar a  $X \in Ob(\mathcal{C})$  es lo mismo a estudiar  $Hom_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ . La filosofía de Yoneda es conocer al objeto mediante como los demás objetos se relacionan con él.

**Definición 1.4.1** (Funtor de Yoneda). *El funtor de Yoneda es el funtor contravariante  $K : \mathcal{C} \rightarrow Fun(\mathcal{C}^{op}, Set)$  tal que*

1. *Envía cada  $X \in Ob(\mathcal{C})$  al funtor representable  $K_X$ .*
2. *Envía cada  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$  a la transformación natural  $\eta^{(f)} := \{\eta_A^{(f)} := f_* : Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, Y)\}_{A \in Ob(\mathcal{C})}$  donde  $f_*$  es la pre-composición.*

**Teorema 1.4.1** (Lema de Yoneda). *Para cada  $X \in Ob(\mathcal{C})$  y cada  $F \in Fun(\mathcal{C}^{op}, Set)$  existe una biyección entre  $Nat(K_X, F)$  y  $F(X)$ .*

*Demostración.* Sean  $X \in Ob(\mathcal{C})$  y  $F \in Fun(\mathcal{C}^{op}, Set)$ . Definimos

$$\Phi_{X,F} : Nat(K_X, F) \rightarrow F(X) \tag{1.11}$$

dada por  $\Phi_{X,F}(\alpha) = \alpha_X(1_X)$ . Y definimos para cada  $t \in F(X)$  y  $Y \in Ob(\mathcal{C})$  a

$$\delta_Y^{(t)} : Hom_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow F(Y)$$

dada por  $\delta_Y^{(t)}(f) = (F(f))(t)$ . Nótese que si  $g \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, \hat{Y})$  entonces de la definición 1.2.9 el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\hat{Y}, X) & \xrightarrow{\delta_Y^{(t)}} & F(\hat{Y}) \\ g^* \downarrow & & \downarrow F(g) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{\delta_Y^{(t)}} & F(Y) \end{array} \quad (1.12)$$

Recordando que  $K_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  para  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  entonces tenemos una transformación natural  $\delta^{(t)} := \{\delta_Y^{(t)}\}_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ . Definimos

$$\Psi_{X,F} : F(X) \rightarrow \text{Nat}(K_X, F)$$

dada por  $\Psi_{X,F}(t) = \delta^{(t)}$ .

Afirmamos que  $\Phi_{X,F}$  es biyección con inversa  $\Psi_{X,F}$  pues por un lado, para  $t \in F(X)$  tenemos

$$(\Phi_{X,F} \circ \Psi_{X,F})(t) = \Phi_{X,F}(\delta^{(t)}) = \delta_X^{(t)}(Id_X) = (F(1_X))(t) = 1_{F(X)}(t) = t$$

o lo que es lo mismo  $\Phi_{X,F} \circ \Psi_{X,F} = 1_{F(X)}$ . Por otro lado, si  $\alpha \in \text{Nat}(K_X, F)$  entonces para  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y  $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  tenemos, por la definición 1.2.9, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{\alpha_Y} & F(Y) \\ s^* \uparrow & & \uparrow F(s) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) & \xrightarrow{\alpha_X} & F(X) \end{array}$$

del cual se sigue que para  $\alpha \in \text{Nat}(K_X, F)$  se tiene

$$(\alpha_Y \circ s^*)(1_X) = \alpha_Y(s \circ 1_X) = \alpha_Y(s) = (F(s))(1_X) = \delta_Y^{(\alpha_X(1_X))}(s)$$

entonces

$$(\Psi_{X,F} \circ \Phi_{X,F})(\alpha) = \Psi_{X,F}(\alpha_X(1_X)) = \delta^{(\alpha_X(1_X))} = \alpha$$

y por tanto

$$\Psi_{X,F} \circ \Phi_{X,F} = 1_{\text{Nat}(K_X, F)}$$

obteniendo la biyección deseada. □

**Observación 1.4.1.** *La biyección 1.11 en la demostración del lema de Yoneda es binatural tanto en  $X$  como en  $F$ . Esto significa que, para cualesquiera  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  y  $\alpha \in \text{Nat}(F, G)$ , los*

siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Nat}(K_Y, F) & \xrightarrow{\Phi_{Y,F}} & F(Y) \\
 \eta^{(f)} \downarrow & & \downarrow F(f) \\
 \text{Nat}(K_X, F) & \xrightarrow{\Phi_{X,F}} & F(X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Nat}(K_X, F) & \xrightarrow{\Phi_{X,F}} & F(X) \\
 f^* \downarrow & & \downarrow \alpha_X \\
 \text{Nat}(K_X, G) & \xrightarrow{\Phi_{X,G}} & G(X)
 \end{array}$$

**Corolario 1.4.1.** *El funtor de Yoneda  $K : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$  es fiel y pleno.*

*Demostración.* Sean  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Entonces, como en la definición 1.2.10 y por la definición 1.4.1 se induce una función  $F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Nat}(K_X, K_Y)$ ,  $F_{X,Y}(f) = F(f) = \eta^{(f)}$ .

Si  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  y  $f \neq g$  entonces claramente  $f_*(1_X) \neq g_*(1_X)$  y por tanto  $F_{X,Y}(f) = \eta^{(f)} \neq \eta^{(g)} = F_{X,Y}(g)$  y  $F_{X,Y}$  es inyectiva.

Ahora bien, para ver que  $F_{X,Y}$  es sobreyectivo queremos ver que dado  $\eta \in \text{Nat}(K_X, K_Y)$  existe  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  tal que  $\eta = \eta^{(f)}$ , lo que significa que para todo  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$  debe suceder que  $\eta_W = f \circ g$ . Eligiendo a  $f$  como el correspondiente a  $\eta$  bajo la biyección de Yoneda 1.11  $f := \Phi_{X, K_Y}(\eta) = \eta_X(1_X)$  se tiene, en virtud de que  $\eta$  es transformación natural, que para  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$  se cumple el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, X) & \xrightarrow{\eta_X} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\
 g^* \downarrow & & \downarrow g^* \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) & \xrightarrow{\eta_W} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)
 \end{array} \tag{1.13}$$

y de 1.13 aplicado a  $1_X$  se sigue que  $\eta_W(g) = f \circ g$ . Por tanto tenemos  $\eta = \eta^{(f)}$ , justo como queríamos.

Concluimos que  $F_{X,Y}$  es biyectivo, y de aquí que el funtor de Yoneda  $K$  es fiel y pleno.  $\square$

**Observación 1.4.2.** *Como consecuencia inmediata del corolario 1.4.1 se tiene por la proposición 1.3.7 que el funtor de Yoneda  $K : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$  induce una subcategoría en  $\text{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ , cuyos objetos son de la forma  $K_X$ , que es equivalente como categoría a  $\mathcal{C}$ .*

**Definición 1.4.2** (Pregavillas). *Sea  $\mathcal{C}$  categoría. La subcategoría de  $\text{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$  de la observación 1.4.2 se conoce como la categoría de funtores representables o pregavillas y se denota por  $\mathbf{Pre}_{\mathcal{C}}$ .*

**Lema 1.4.1.** *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es funtor fiel y pleno. Si  $F(X) \cong F(Y)$  entonces  $X \cong Y$ .*

*Demostración.* Solo demostraremos el caso covariante, pues el caso contravariante es similar. Sea  $h : F(X) \rightarrow F(Y)$  isomorfismo. Por hipótesis de que  $F$  es pleno existe un único  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $F(f) = h$  y un único  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $F(g) = h^{-1}$ . Luego entonces

$$F(1_X) = 1_{F(X)} = h^{-1} \circ h = F(g) \circ F(f) = F(fg)$$

pero por ser  $F$  fiel debe ser que  $f \circ g = 1_X$ . Análogamente debe suceder que  $g \circ f = 1_Y$ . Por lo tanto  $f$  es un isomorfismo entre  $X$  y  $Y$ .  $\square$

**Corolario 1.4.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  categoría y  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Entonces  $X \cong Y$  si y solo si  $K_X \cong K_Y$ .*

*Demostración.* Si  $X$  y  $Y$  son isomorfos entonces  $K_X$  y  $K_Y$  son isomorfos pues los funtores respetan isomorfismos por la proposición 1.2.6. Si  $K_X$  y  $K_Y$  son isomorfos entonces  $X$  y  $Y$  son isomorfos como consecuencia del lema 1.4.1 y del corolario 1.4.1.  $\square$

**Corolario 1.4.3.** *Sean los funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tales que la pareja  $(F, G)$  es una adjunción. Entonces  $F$  preserva límites.*

*Demostración.* Sea  $I$  un conjunto de índices y  $H : I \rightarrow \mathcal{C}$  funtor con límite  $(X, \{p_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I})$ . Luego  $(F(X), \{F(p_i) : F(X) \rightarrow F(X_i)\}_{i \in I})$  es cono de  $F \circ H$ . Ahora bien, si  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  entonces

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{lím } H, G(Z)) \quad (1.14)$$

$$\cong \text{lím } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H(\cdot), G(Z)) \quad (1.15)$$

$$\cong \text{lím } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F \circ H(\cdot), Z) \quad (1.16)$$

$$\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{lím } F \circ H, Z) \quad (1.17)$$

Los isomorfismos en 1.14 y 1.16 se debe a la definición 1.3.2 de funtores adjuntos; y los isomorfismos 1.15 y 1.17 se deben a la proposición 1.3.6. Además, 1.17 implica que

$$K_Z(F(X)) \cong K_Z(\text{lím } F \circ H) \quad (1.18)$$

Aplicando el corolario 1.4.2 a 1.18 se sigue que

$$F(X) \cong \text{lím } F \circ H$$

Por tanto  $F$  preserva límites.  $\square$

## Capítulo 2

# Geometría Diferencial

Un grupo de Lie es un objeto que combina las estructuras de grupo con la de una variedad diferenciable, de modo que todas sus operaciones son suaves. Por su parte, una variedad es un objeto geométrico que, a nivel local, se asemeja a un espacio euclidiano. Dada esta relación, es menester un capítulo con secciones dedicadas a la revisión de conceptos como variedades, espacio tangente y campos vectoriales. Estos dos últimos siendo particularmente importantes, ya que se utilizan al definir el álgebra de Lie de un grupo de Lie.

Para trabajar teoremas que utilizaremos más adelante incluimos el estudio de subvariedades, espacios cubrientes y enunciamos el teorema de Frobenius.

Para este capítulo nos basaremos principalmente en [Lee09], [Fer24] y [Lee03].

### 2.1. Variedades

Comenzamos con la definición de variedad topológica para luego inducir sobre cualquier conjunto  $M$  con cierta estructura diferenciable  $\mathcal{A}$  una topología. Si con la topología inducida,  $M$  resulta ser una variedad topológica entonces el espacio topológico  $M$  junto a su estructura diferenciable será una variedad diferenciable.

Cabe aclarar que en esta tesis toda vecindad de un punto hace referencia a un abierto cual sea al cual el punto pertenece.

**Observación 2.1.1.** *Por  $\mathbb{R}^0$  nos referiremos a un conjunto unitario  $\{*\}$  equipado con la topología discreta, y con  $\mathbb{N}_0$  denotamos al conjunto  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . Por convención estableceremos que cualquier función de la forma  $f : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  o  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^0$  es de clase  $C^\infty$ .*

Recordemos algunas definiciones básicas de topología general.

**Definición 2.1.1** (Homeomorfismo). *Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo si se satisface lo siguiente:*

1.  $f$  es continua.
2.  $f$  es invertible y  $f^{-1}$  también es continua.

Además, en caso de existir un homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  diremos que los espacios topológicos  $X$  y  $Y$  son homeomorfos y lo denotamos  $X \cong Y$ .

**Definición 2.1.2** (Espacio de Hausdorff). *Un espacio topológico  $X$  es un espacio de Hausdorff o  $T_2$  si para cualesquiera  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  existen dos abiertos  $U$  y  $V$  en  $X$  tales que  $x \in U$ ,  $y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . A veces simplemente diremos que  $X$  es Hausdorff para referirnos a que  $X$  es espacio de Hausdorff.*

**Definición 2.1.3** (Cubierta). *Sea  $X$  un espacio topológico. Una familia de subconjuntos  $U \subseteq \mathbb{P}(X)$  es una cubierta de  $X$  si*

$$\bigcup U = X$$

*En caso de que cada elemento de  $U$  sea un abierto de  $X$ , diremos que  $U$  es una cubierta abierta de  $X$ .*

**Definición 2.1.4** (Refinamiento de una cubierta). *Sea  $X$  espacio topológico con  $U$  y  $V$  cubiertas de  $X$ .  $V$  es refinamiento de  $U$  si*

$$\forall v \in V \exists u \in U (v \subseteq u)$$

**Definición 2.1.5** (Familia localmente finita). *Sea  $X$  espacio topológico. Una familia de subconjuntos  $U \subseteq \mathbb{P}(X)$  es localmente finita si para cada  $x \in X$  existe una vecindad  $U_x$  de  $x$  tal que solo una cantidad finita de elementos en  $U$  tiene intersección no vacía con  $U_x$ .*

**Definición 2.1.6** (Espacio paracompacto). *Un espacio topológico  $X$  es paracompacto si toda cubierta abierta de  $X$  admite un refinamiento localmente finito.*

Ahora podemos dar la definición de variedad topológica.

**Definición 2.1.7** (Variedad topológica). *Sea  $n \in \mathbb{N}_0$ . Una variedad topológica  $n$ -dimensional (o también lo llamaremos  $n$ -variedad) es un espacio topológico  $M$  Hausdorff y paracompacto tal que para todo punto  $p \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  que es homeomorfo a un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Observación 2.1.2** (Espacio localmente euclidiano). *En general, un espacio topológico  $M$  tal que todo punto  $p \in M$  tiene una vecindad homeomorfa a una vecindad de algún  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , se dirá que es localmente euclidiano.*

**Observación 2.1.3.** *Si  $M$  es  $n$ -variedad entonces escribiremos  $\dim(M) = n$ .*

**Ejemplo 2.1.1** (Circunferencia unitaria como variedad topológica). *El círculo unitario*

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

con la topología de subespacio es una 1-variedad topológica pues si  $z_0 \in \mathbb{S}^1$  con  $\theta_{z_0} := \arg(z_0)$  entonces podemos dar un homeomorfismo local  $f_{z_0} : U_{z_0} \rightarrow (\theta_{z_0} - \pi, \theta_{z_0} + \pi)$  en  $z_0$  dado por  $f_{z_0}(z) = \arg(z)$  donde  $U_{z_0} := \{z \in \mathbb{S}^1 : \arg(z) \in (\theta_{z_0} - \pi, \theta_{z_0} + \pi)\}$ .

**Ejemplo 2.1.2** (Producto de variedades topológicas). Si  $M_1$  y  $M_2$  son variedades topológicas, de dimensión  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente, entonces  $M_1 \times M_2$  equipado con la topología producto es una variedad topológica  $(n_1 + n_2)$ -dimensional pues dado  $(p, q) \in M_1 \times M_2$ , existe un abierto  $U$  en  $M_1$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n_1}$  y un abierto  $V$  en  $M_2$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n_2}$  de modo que  $(p, q) \in U \times V$  con  $U \times V$  abierto en el espacio  $M_1 \times M_2$  homeomorfo a un abierto en  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  que a su vez es homeomorfo a un abierto en  $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ . Por ello es que el toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{T}^n := (\mathbb{S}^1)^n$  es una  $n$ -variedad topológica.

Si deseamos que un conjunto cualesquiera  $M$  sea variedad topológica entonces en primer lugar debería ser o un espacio discreto ó localmente euclidiano, siendo necesario para lo segundo que cada punto pertenezca a un subconjunto que sea biyectable a  $\mathbb{R}^n$ . De este planteamiento se sigue la siguiente definición.

**Definición 2.1.8** (Carta). Sea  $M$  conjunto y  $n \in \mathbb{N}_0$  fijo. Una carta en  $M$  es una biyección  $x$  de un subconjunto  $U \subseteq M$  en un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ . Denotamos a la carta por la pareja  $(U, x)$ . Llamamos a

$$x_i := \pi_i \circ x$$

la  $i$ -ésima función coordenada de la parametrización  $x$  de la carta. Si  $p \in U$  entonces decimos que  $(U, x)$  es carta de  $p$ .

Pero una sola carta de  $M$  no siempre es suficiente. Tal como se ve en el ejemplo 2.1.1, el homeomorfismo no es global, hay un punto de la circunferencia que no se mapea para poder trabajar con abiertos en el codominio. Por tanto, ocupamos una familia de éstas cartas. A la familia de cartas le exigimos que la familia de dominios sea una cubierta del conjunto  $M$  y que los solapes entre dominios de cartas vayan a subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  mediante cierta regularidad.

**Definición 2.1.9** (Atlas). Sea  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  una colección de cartas en  $M$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  es un atlas de clase  $C^r$  si:

1.  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .
2. Para cualesquiera  $\alpha, \beta \in A$  se tiene que  $x_\alpha[U_\alpha \cap U_\beta]$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .
3. Para cualesquiera  $\alpha, \beta \in A$ , si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  entonces la función de transición  $x_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \circ x_\alpha^{-1}|_{x_\alpha[U_\alpha \cap U_\beta]}$  es un  $C^r$ -difeomorfismo.

**Observación 2.1.4.** Desde este momento, cada que mencionemos carta, nos referiremos a cartas de algún atlas de clase  $C^r$ .

**Definición 2.1.10** (Atlas equivalentes). *Dos atlas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  de  $M$  de clase  $C^r$  son equivalentes si  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  también es un atlas de  $M$  de clase  $C^r$ .*

**Observación 2.1.5.** *Sea  $M$  variedad. La relación  $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$  si y solo si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  son atlas de clase  $C^r$  equivalentes resulta ser de equivalencia en el conjunto de atlas de  $M$  de clase  $C^r$ . La unión de todos los atlas de clase  $C^r$  en una clase de equivalencia es también un atlas de esa clase de equivalencia. Tal atlas es un atlas maximal de clase  $C^r$  ya que no está contenido propiamente en otro atlas de la clase. Se sigue que todo atlas de clase  $C^r$  está contenido en un atlas maximal.*

**Definición 2.1.11** (Estructura diferenciable). *Una estructura diferenciable de clase  $C^r$  en  $M$  es una clase de equivalencia de un atlas de clase  $C^r$  en  $M$ . Diremos que una estructura diferenciable de clase  $C^\infty$  es una estructura suave.*

**Ejemplo 2.1.3** (Estructura trivial).  *$\{(Id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$  es un atlas de una sola carta para  $\mathbb{R}^n$  que determina una estructura diferenciable suave en  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definición 2.1.12** (Carta compatible). *Una carta  $(U, x)$  es compatible con un atlas  $\mathcal{A}$  de clase  $C^r$  si  $\mathcal{A} \cup \{(U, x)\}$  sigue siendo un atlas de clase  $C^r$ .*

**Lema 2.1.1.** *Sea  $M$  un conjunto con una estructura diferenciable de clase  $C^r$  dada por el atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ . Si  $(U, x)$  y  $(V, y)$  son cartas compatibles con  $\mathcal{A}$  tales que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Entonces la carta  $(U \cap V, x|_{U \cap V})$  también es compatible con  $\mathcal{A}$  y por tanto está en el atlas maximal generado por  $\mathcal{A}$ . Además, si  $O$  es abierto de  $x[U]$  para una carta compatible  $(U, x)$  entonces  $(x^{-1}[O], x|_{x^{-1}[O]})$  es también carta compatible.*

*Demostración.* Lema 1.30 de [Lee09]. □

**Observación 2.1.6.** *En virtud del lema anterior, si  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  es un atlas maximal (Como puede ser la unión de los elementos en una estructura diferenciable) entonces la familia  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  provee una base para una topología en  $M$  llamada la topología inducida por el atlas (O la topología inducida por la estructura diferenciable) en  $M$ . Además, dicha topología es tal que cualquier parametrización  $x_\alpha$  en el atlas es un homeomorfismo.*

**Definición 2.1.13** (Variedad Diferenciable). *Una variedad diferenciable de clase  $C^r$  es un conjunto  $M$  con una estructura diferenciable de clase  $C^r$  en  $M$  de modo que topología inducida por la estructura diferenciable es Hausdorff paracompacta.*

**Observación 2.1.7.** *Podemos considerar a una variedad diferenciable como una pareja  $(M, \mathcal{A})$  donde  $M$  es un espacio topológico con la topología inducida por el atlas maximal que determina el atlas  $\mathcal{A}$ . Además, por las restricciones que impone la definición 2.1.13,  $M$  es en efecto una variedad topológica y la dimensión de  $M$  como variedad diferenciable es la dimensión que tiene como variedad topológica.*

**Definición 2.1.14** (Función diferenciable). Sean  $(M, \mathcal{A}_M)$  y  $(N, \mathcal{A}_N)$  variedades de clase  $C^k$ . Una función  $f : M \rightarrow N$  es de clase  $C^r$  ( $O$  es  $r$  veces diferenciable o  $C^r$ -diferenciable, donde  $r \leq k$ ) en  $p \in M$  si existe una carta  $(V, y)$  en  $\mathcal{A}_N$  con  $f(p) \in V$  y una carta  $(U, x)$  en  $\mathcal{A}_M$  con  $p \in U$  tal que  $f[U] \subseteq V$  y

$$y \circ f \circ x^{-1}$$

es de clase  $C^r$  en  $x(p)$ . Si  $f$  es  $C^r$ -diferenciable en todo  $p \in M$  entonces decimos que  $f$  es función de clase  $C^r$ .

Las funciones de clase  $C^\infty$  se dicen funciones suaves. Y las funciones de clase  $C^0$  serán, por convención, las funciones continuas.

**Observación 2.1.8.** Nótese que el hecho de que una función sea de clase  $C^r$  en un punto no depende de una carta en especial sino del comportamiento local de la función en ese punto. Si  $f : M \rightarrow N$  es de clase  $C^r$  en  $p \in M$  entonces existe una carta  $(U, x)$  de  $p$  y una carta  $(V, y)$  de  $f(p)$  tales que  $y \circ f \circ x^{-1}$  es de clase  $C^r$ . Si  $(U', x')$  es carta de  $p$  y  $(V', y')$  es carta de  $f(p)$  entonces

$$y' \circ f \circ x'^{-1} = (y' \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ x'^{-1})|_{x[U] \cap x'[U']}$$

es composición de funciones de clase  $C^r$  y es, por tanto, de clase  $C^r$ .

**Proposición 2.1.1.** Si  $f : M \rightarrow N$  es  $C^r$ -diferenciable entonces es continua.

*Demostración.* Como  $f$  es  $C^r$ -diferenciable entonces  $y \circ f \circ x^{-1}$  es de clase  $C^r$  y en particular es continua. Si  $W \subseteq N$  es abierto entonces  $(y^{-1} \circ (y \circ f \circ x^{-1}))^{-1}[W] = (f \circ x^{-1})^{-1}[W]$  es abierto y entonces  $x^{-1}[(f \circ x^{-1})^{-1}[W]] = f^{-1}[W]$  es abierto.  $\square$

**Proposición 2.1.2.** Si  $f : M \rightarrow N$  es de clase  $C^r$  y  $g : N \rightarrow P$  es de clase  $C^r$  entonces  $g \circ f$  es de clase  $C^r$  en  $p$ .

*Demostración.* Como  $f$  es de clase  $C^r$  en  $p$  existe una carta  $(U, x)$  de  $p$  y una carta  $(V, y)$  de  $f(p)$  tales que  $y \circ f \circ x^{-1}$  es de clase  $C^r$ . Además, por la observación 2.1.8 existe una carta  $(W, z)$  de  $g(f(p))$  tal que  $z \circ g \circ y^{-1}$  es de clase  $C^r$ . Finalmente,

$$z \circ (g \circ f) \circ x^{-1} = (z \circ g \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1})$$

es de clase  $C^r$ . Por tanto  $g \circ f$  es de clase  $C^r$  en  $p$ .  $\square$

**Definición 2.1.15** (Difeomorfismo). Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves. Una función  $f : M \rightarrow N$  tal que  $f$  y  $f^{-1}$  son de clase  $C^r$  es un difeomorfismo de clase  $C^r$ . En caso de que  $r = \infty$  simplemente decimos que  $f$  es un difeomorfismo. Además, en caso de que exista un difeomorfismo de clase  $C^r$  entre  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de clase  $C^r$ , decimos que  $M$  y  $N$  son variedades difeomorfas.

**Observación 2.1.9.** Sea  $M$   $n$ -variedad de clase  $C^r$ . Si  $(U, x)$  es carta de  $M$  entonces  $x$  es un difeomorfismo local de clase  $C^r$  entre  $U$  y el abierto  $x[U]$  de  $\mathbb{R}^n$  puesto que la función  $x \circ x^{-1} = Id_{x[U]}$  es suave invertible y por lo tanto es de clase  $C^r$ .

**Proposición 2.1.3** (Producto de variedades diferenciables). Si  $(M_1, \mathcal{A}_1)$  y  $(M_2, \mathcal{A}_2)$  son variedades diferenciables de dimensiones  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, entonces

$$(M_1 \times M_2, \{U_\alpha \times V_\beta, (\pi_1 \circ x_\alpha \circ \pi_{M_1}, \dots, \pi_{m_1} \circ x_\alpha \circ \pi_{M_1}, \pi_1 \circ y_\beta \circ \pi_{M_2}, \dots, \pi_{m_2} \circ y_\beta \circ \pi_{M_2})\}_{((U_\alpha, x_\alpha), (V_\beta, y_\beta)) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2})$$

es una variedad diferenciable de dimensión  $m_1 + m_2$ .

*Demostración.* Como está definido, el espacio  $M_1 \times M_2$  es localmente euclideo y está equipado con la topología producto de las topologías inducidas por los respectivos atlas. El producto es  $T_2$  porque es producto de espacios  $T_2$ .

Por otro lado, como una variedad  $M$  es localmente euclidea entonces es localmente metrizable, y por el teorema de Smirnov (Puede consultarse como el teorema 42.1 en [Mun+02]) se tiene que  $M$  es metrizable. Como el producto de espacios metrizables vuelve a ser metrizable entonces  $M_1 \times M_2$  es metrizable y por lo tanto, nuevamente por el teorema de Smirnov, es paracompacto.  $\square$

**Observación 2.1.10** (Grupo de difeomorfismos). El conjunto de difeomorfismos forma un grupo con la composición, denotamos al conjunto de difeomorfismos de clase  $C^r$  por  $Diff^r(M)$ . Convenimos en que  $Diff^\infty(M) =: Diff(M)$  y que  $Diff^0(M)$  denote el grupo de homeomorfismos de  $M$  en sí mismo.

Los siguientes dos lemas serán útiles para construir variedades diferenciables.

**Lema 2.1.2.** Sea  $(M, \tau)$  espacio topológico con un atlas de clase  $C^r$ . Si cada carta  $(U, x)$  del atlas tiene como dominio  $U$  un abierto de  $M$  y  $x$  es homeomorfismo con la topología de  $M$  entonces  $\tau$  coincide con la topología inducida por la estructura diferenciable mencionada en la observación 2.1.6.

*Demostración.* Lema 1.35 de [Lee09].  $\square$

**Lema 2.1.3.** Sea  $M$  un conjunto con  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  un atlas de clase  $C^r$ . Entonces:

1. Si

$$\forall p, q \in M (p \neq q \rightarrow (\exists \alpha, \beta \in A (U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset \wedge p \in U_\alpha \wedge q \in U_\beta)) \vee (\exists \gamma \in A (p, q \in U_\gamma)))$$

entonces la topología inducida por  $\mathcal{A}$  es  $T_2$ .

2. Si  $\mathcal{A}$  es numerable entonces la topología inducida por  $\mathcal{A}$  es segundo numerable.

3. Si

$$\forall \alpha_0 \in A(|\{\alpha \in A : U_\alpha \cap U_{\alpha_0} \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0)$$

entonces la topología inducida por  $\mathcal{A}$  es paracompacta.

*Demostración.* Proposición 1.32 de [Lee09]. □

Son relevantes aquellas variedades diferenciables cuyas funciones de transición son infinitamente diferenciables. De aquí proviene la siguiente definición.

**Definición 2.1.16** (Variedad suave). *Una variedad diferenciable de clase  $C^\infty$  se conoce como una variedad suave. Un atlas de clase  $C^\infty$  se dice que es un atlas suave.*

**Ejemplo 2.1.4** (Circunferencia unitaria como variedad suave). *Retomando el ejemplo 2.1.1 afirmamos que la familia  $\{U_{z_0}, f_{z_0}\}_{z_0 \in \mathbb{S}^1}$  es un atlas de clase  $C^\infty$  para  $\mathbb{S}^1$  pues dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^1$  se tiene que  $f_\alpha[U_\alpha \cap U_\beta] = (\alpha - \pi, \alpha + \pi) \cap (\beta - \pi, \beta + \pi)$  es abierto en  $\mathbb{R}$  y en el caso de que sucediera  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  se aprecia que la función de transición  $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}|_{f_\alpha[U_\alpha \cap U_\beta]} = Id_{f_\alpha[U_\alpha \cap U_\beta]}$  es suave. Por lo tanto, el atlas induce una estructura diferenciable suave  $\mathcal{A}$  en  $\mathbb{S}^1$ . Como además cada  $f_\alpha$  es un homeomorfismo con la topología de subespacio de  $\mathbb{S}^1$  entonces por el lema 2.1.2 la topología inducida por  $\mathcal{A}$  coincide con la topología de subespacio de  $\mathbb{S}^1$  que resulta ser  $T_2$  y paracompacta. Se concluye que  $(\mathbb{S}^1, \mathcal{A})$  es una variedad suave.*

**Ejemplo 2.1.5** (Espacios vectoriales). *Si  $V$  es  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n$  con base  $\{v_i\}_{i=1}^n$  entonces la carta global  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $x(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = (a_1, \dots, a_n)$  dota a  $V$  de un atlas suave  $\mathcal{A} = \{(V, x)\}$ . Como  $\mathcal{A}$  es atlas suave y satisface las condiciones del lema 2.1.3 entonces  $(V, \mathcal{A})$  es una variedad suave. Se sigue que todo  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n \in \mathbb{N}$  puede ser considerado una  $n$ -variedad suave.*

**Definición 2.1.17** (Categoría de variedades diferenciables). *Consideramos  $\mathbf{Man}^r$  la categoría cuyos objetos son variedades diferenciable de clase  $C^r$  y cuyos morfismos son funciones diferenciables de clase  $C^r$ . En caso de que  $r = \infty$  denotamos a la categoría de variedades suaves por  $\mathbf{Man}$  y a veces simplemente nos referiremos a ella como la categoría de variedades diferenciables.*

**Observación 2.1.11.** *Por la observación 2.1.6, toda variedad suave  $M$  es un espacio topológico. Además, si  $f : M \rightarrow N$  es diferenciable entonces  $f$  es continua. Por ello, podemos definir el funtor olvido  $U_{\mathbf{Man}, \mathbf{Top}} : \mathbf{Man} \rightarrow \mathbf{Top}$ . Este funtor es fiel, más no es pleno porque no toda función continua es diferenciable. Además, por la construcción de la topología inducida por una variedad en la observación 2.1.6 y la proposición 2.1.3, la topología inducida por el producto de dos variedades coincide con la topología producto de los dos espacios topológicos inducidos. Esto último indica que el funtor  $U_{\mathbf{Man}, \mathbf{Top}}$  preserva productos finitos.*

**Definición 2.1.18** (Categoría de variedades punteadas). *La categoría de variedades punteadas es aquella que tiene por objetos a los pares  $(M, p)$  con  $M$  variedad suave y  $p \in M$ . Un morfismo  $f$  entre  $(M, p)$  y  $(N, q)$  es una función suave  $f : M \rightarrow N$  tal que  $f(p) = q$ . Denotamos a esta categoría mediante  $\mathbf{Man}_*$ .*

## 2.2. Espacio tangente

El espacio tangente de una variedad suave en un punto va a ser el análogo al hiperplano que mejor se aproxima a una hipersuperficie. En efecto, el espacio tangente nos dará información sobre el comportamiento local de una variedad suave, del mismo modo que una recta tangente nos habla de las propiedades locales de una curva.

**Definición 2.2.1** (Germen). *Sea  $M$  variedad suave y  $p \in M$ . Las funciones  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U$  y  $V$  vecindades de  $p$ , tienen el mismo germen en  $p$  si existe una vecindad  $W$  de  $p$  tal que  $W \subseteq U \cap V$  y  $f|_W = g|_W$ .*

**Observación 2.2.1.** *Sea  $M$  variedad suave y  $p \in M$ . En el conjunto  $\{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid U \text{ es vecindad de } p \text{ y } f \text{ es suave}\}$  definimos la relación  $f \sim g$  si y solo si  $f$  y  $g$  tienen el mismo germen en  $p$ . Puede verificarse que la relación  $\sim$  es de equivalencia.*

**Definición 2.2.2.** *Sea  $M$  variedad y  $p \in M$ . Al conjunto de clases de equivalencia de funciones que tienen el mismo germen en  $p$  se le denota por  $C_p^\infty(M)$ .*

**Observación 2.2.2.** *Dada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  función suave en  $U$  vecindad de  $p \in M$ , la clase de equivalencia  $[f]$  se conoce como el germen de  $f$  en  $p$ . Ya que para cualquier  $g \in [f]$  se tiene  $g(p) = f(p)$  entonces consideraremos  $[f](p) := f(p)$ . Además, para no sobrecargar la notación, a veces cuando escribamos  $f \in C_p^\infty(M)$  nos referiremos a  $[f]$  por medio de  $f$ .*

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $M$  variedad suave y  $p \in M$ . El conjunto  $C_p^\infty(M)$  tiene estructura de  $\mathbb{R}$ -álgebra.*

*Demostración.* Dados  $[f], [g] \in C_p^\infty(M)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos las operaciones

$$[f] + [g] = [f + g]$$

$$\lambda[f] = [\lambda f]$$

$$[f][g] = [fg]$$

Puede comprobarse que las operaciones están bien definidas y que dotan a  $C_p^\infty(M)$  de la estructura de  $\mathbb{R}$ -álgebra. □

**Definición 2.2.3** (Vector tangente). Sea  $M$  variedad suave. Un vector tangente  $v_p$  en  $p \in M$  es un funcional lineal  $v_p : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface la regla de Leibniz

$$\forall f, g \in C_p^\infty(M) \quad (v_p(fg) = g(p)v_p(f) + f(p)v_p(g))$$

**Proposición 2.2.2** (Espacio tangente). El conjunto de vectores tangentes en  $p \in M$ , denotado por  $T_p M$ , tiene estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. A dicho espacio lo llamamos el espacio tangente de  $M$  en  $p$ .

*Demostración.* Basta ver  $T_p M$  es subespacio vectorial del espacio de funciones lineales de  $C_p^\infty(M)$  en  $\mathbb{R}$ . Primero, si  $u_p, v_p \in T_p M$  y  $f, g \in C_p^\infty(M)$  entonces

$$(u_p + v_p)(fg) = u_p(fg) + v_p(fg) = g(p)[u_p(f)] + f(p)[u_p(g)]$$

y así  $u_p + v_p \in T_p M$ . Por último, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces

$$(\lambda v_p)(fg) = \lambda(v_p(fg)) = \lambda(g(p)v_p(f) + f(p)v_p(g)) = g(p)(\lambda v_p)(g) + f(p)(\lambda v_p)(g)$$

y así  $\lambda v_p \in T_p M$ . □

**Observación 2.2.3.** De la regla de Leibniz se sigue que al evaluar un germen constante  $[c]$  en un vector  $v \in T_p M$  se tiene  $v([c]) = 0$  pues

$$v([c]) = c \cdot v([1]) = c \cdot v([1][1]) = c(2 \cdot v([1])) = 2 \cdot v([c])$$

A veces nos referiremos a las funciones que son lineales y que cumplen la regla de Leibniz como derivaciones. En concreto, un vector  $v \in T_p M$  es una derivación en  $C_p^\infty(M)$ .

**Proposición 2.2.3.** Si  $(U, x)$  es carta de la variedad  $M$  en  $p$  entonces la función  $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) := \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial y_i}|_{x(p)}$$

es un vector tangente en  $p$ .

*Demostración.* Como veremos, las propiedades de derivación van a seguirse de las propiedades de la  $i$ -ésima derivada parcial habitual. Primero, si  $f, g \in C_p^\infty(M)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f + \lambda g) = \frac{\partial((f + \lambda g) \circ x^{-1})}{\partial y_i}|_{x(p)} = \frac{\partial(f \circ x^{-1} + \lambda g \circ x^{-1})}{\partial y_i}|_{x(p)} = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}|_p(g)$$

Por último, calculamos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_i}|_p(fg) &= \frac{\partial(f \circ x^{-1} \cdot g \circ x^{-1})}{\partial y_i}|_{x(p)} \\
 &= f(x^{-1}(x(p))) \frac{\partial(g \circ x^{-1})}{\partial y_i}|_{x(p)} + g(x^{-1}(x(p))) \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial y_i}|_{x(p)} \\
 &= f(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) + g(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p(g)
 \end{aligned}$$

□

Es posible identificar al espacio tangente mediante una descripción más algebraica. Una descripción análoga es la que se toma cuando se define el espacio tangente para variedades algebraicas en el contexto de geometría algebraica, donde no tenemos nociones de diferenciabilidad.

**Proposición 2.2.4.** *El conjunto*

$$m_p := \{f \in C_p^\infty(M) : f(p) = 0\}$$

*es un ideal maximal de  $C_p^\infty(M)$ .*

*Demostración.* El conjunto es ideal ya que si  $f, g \in m_p$  entonces  $(f + g)(p) = f(p) + g(p) = 0$  y por tanto  $f + g \in m_p$ . Y si  $h \in C_p^\infty(M)$  entonces  $(hf)(p) = h(p)f(p) = h(p) \cdot 0 = 0$  y por tanto  $hf \in m_p$ .

El ideal es maximal ya que si  $I$  es un ideal tal que  $m_p \subsetneq I \subseteq C_p^\infty(M)$  entonces existe un  $f \in I$  con  $f(p) \neq 0$  y por continuidad existe una vecindad  $U$  de  $p$  donde  $f$  no es nula. Luego, por ser  $I$  ideal se tiene que  $\frac{1}{f}f = 1 \in I$  y por tanto  $I = M$ . □

**Proposición 2.2.5.** *Sea  $M$  variedad suave con  $p \in M$ . Entonces*

$$T_p M \cong (m_p/m_p^2)^*$$

*Demostración.* Definimos la función lineal  $F : T_p M \rightarrow (m_p/m_p^2)^*$  dada por  $F(v)(f + m_p^2) = v(f)$ , la cual es un funcional lineal porque  $v$  lo es.  $F$  está bien definida pues si  $s, t \in m_p$  entonces por Leibniz ocurre que  $v(st) = s(p)v(t) + t(p)v(s) = 0$  y por lo tanto si  $f + m_p^2 = g + m_p^2$  entonces  $v(f) = v(g)$ .

$F$  es inyectiva pues si  $F(v) = 0$  entonces dado  $g \in C_p^\infty(M)$  se tiene  $0 = F(v)(g + m_p^2) = v(g)$  y por tanto  $v = 0$ .

$F$  es suprayectiva pues si tenemos  $L : m_p/m_p^2 \rightarrow \mathbb{R}$  entonces podemos definir el vector tangente  $v \in T_p M$  dado por  $v(g) = L(g - g(p) + m_p^2)$ , el cual en efecto satisface la regla de Leibniz pues dados  $f, g \in C_p^\infty(M)$  se tiene

$$v(fg) = L(fg - (fg)(p) + (f(p) - f)(g - g(p)) + m_p^2) = f(p)(L(g - g(p) + m_p^2)) + g(p)(L(f - f(p) + m_p^2))$$

y por tanto

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

Además  $v$  es tal que dado  $f \in m_p$  se tiene

$$F(v)(f + m_p^2) = v(f) = v(f + f(p)) = L(f + m_p^2)$$

y por tanto  $F(v) = L$ . Concluimos que  $F$  es un isomorfismo entre  $T_p M$  y  $(m_p/m_p^2)^*$ .  $\square$

Como todo espacio vectorial, el espacio tangente tendrá una base y un correspondiente espacio dual.

**Proposición 2.2.6** (Base coordenada). *Sea  $M$   $n$ -variedad y  $(U, x)$  carta de  $M$  con  $p \in M$ . La  $n$ -tupla de derivaciones  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_{i=1}^n$  es una base para  $T_p M$ . Además,  $v \in T_p M$  se escribe como la siguiente combinación lineal*

$$v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$$

*Demostración.* Teorema 2.10 de [Lee09].  $\square$

**Observación 2.2.4.** *Sea  $M$   $n$ -variedad suave. En virtud de que por la proposición 2.2.6  $T_p M$  es  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con base  $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_{i=1}^n$  podemos construir una base dual  $\{dx_i\}_{i=1}^n$  para  $T_p^* M := (T_p M)^*$  donde  $dx_i : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional lineal definido en la base del espacio mediante*

$$dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p) = \delta_{ij}$$

Hasta el momento hemos asociado a cada punto de una variedad un espacio vectorial. Ahora asociaremos a cada función suave una transformación lineal.

**Definición 2.2.4** (Función tangente). *Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves,  $f : M \rightarrow N$  suave y  $p \in M$ . La función tangente de  $f$  en  $p$  es la función  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  dada por  $(T_p f(v_p))(g) := v_p(g \circ f)$ .*

$$M \xrightarrow{f} N \quad T_p M \xrightarrow{T_p f} T_{f(p)} N$$

**Proposición 2.2.7.** *La función tangente de la definición 2.2.4 está bien definida y es  $\mathbb{R}$ -lineal.*

*Demostración.* Si  $g$  y  $h$  son iguales en la vecindad  $W$  de  $f(p)$  entonces

$$g \circ f|_{f^{-1}[W] \cap \text{dom}(g) \cap \text{dom}(h)} = h \circ f|_{f^{-1}[W] \cap \text{dom}(g) \cap \text{dom}(h)}$$

y por tanto  $(T_p f(v_p))(g) = (T_p f(v_p))(h)$ .

Veamos que es lineal: Sean  $u_p, v_p \in T_p M$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f : M \rightarrow N$  suave y  $g \in C_{f(p)}^\infty(N)$ . Entonces

$$(T_p f(u_p + \lambda v_p))(g) = u_p(g \circ f) + \lambda v_p(g \circ f) = (T_p f(u_p))(g) + \lambda (T_p f(v_p))(g)$$

y así  $T_p f(u_p + \lambda v_p) = T_p f(u_p) + \lambda T_p f(v_p)$ .  $\square$

**Observación 2.2.5.** Sea  $M$  variedad suave. Si  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  y  $f \in C_p^\infty(M)$  entonces

$$((T_p 1_M)(v))(f) = v(f \circ 1_M) = v(f) = (1_{T_p M}(v))(f)$$

y se sigue que  $T_p 1_M = 1_{T_p M}$ .

**Proposición 2.2.8** (Regla de la cadena). Sean  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow P$  funciones suaves. Para cada  $p \in M$  tenemos que

$$T_p(g \circ f) = (T_{f(p)}g) \circ (T_p f)$$

*Demostración.* Sea  $v_p \in T_p M$  y  $h \in C_p^\infty(P)$ . Entonces

$$((T_{f(p)}g) \circ (T_p f)(v_p))(h) = (T_p f(v_p))(h \circ g) = v_p(h \circ g \circ f) = (T_p(g \circ f)(v_p))(h)$$

y así se tiene la igualdad deseada.  $\square$

Por la observación 2.2.5 y la regla de la cadena podemos definir el funtor tangente puntual.

**Definición 2.2.5** (Funtor tangente puntual). El funtor tangente puntual  $T_* : \mathbf{Man}_* \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  envía cada variedad punteada  $(M, p)$  al espacio tangente  $T_p M$ , y cada morfismo  $f : (M, p) \rightarrow (N, q)$  a la transformación  $\mathbb{R}$ -lineal  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ .

**Corolario 2.2.1.** Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves. Si  $p \in M$  y  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo entonces  $T_p f$  es un isomorfismo lineal.

*Demostración.* Basta aplicar la proposición 1.2.6 al funtor tangente puntual de la definición 2.2.5.  $\square$

Para mostrar que los conceptos de esta sección son una generalización de aquellos provenientes del cálculo diferencial en  $\mathbb{R}^n$ , calcularemos el espacio tangente de  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación 2.2.6.** Asumiremos la convención de que dada la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  entonces  $f_j$  denotará a la  $j$ -ésima función coordenada de  $f$ . Es decir, si  $j \in \{1, \dots, n\}$  entonces  $f_j = \pi_j \circ f$ , donde  $\pi_j((x_1, \dots, x_n)) = x_j$ .

**Ejemplo 2.2.1** (Espacio tangente y función tangente en los  $\mathbb{R}^n$  y en espacios vectoriales). Sea  $\mathbb{R}^n$  con la estructura diferenciable trivial. Si  $p \in \mathbb{R}^n$  entonces usando la carta  $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$  y tomando

$f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) = \frac{\partial(f \circ 1_{\mathbb{R}^n}^{-1})}{\partial y_i}|_p = \frac{\partial f}{\partial y_i}|_p$$

y por tanto una base para el espacio tangente  $T_p\mathbb{R}^n$  es aquella formada por los funcionales de las derivadas parciales usuales  $\{\frac{\partial}{\partial y_i}|_p\}_{i=1}^n$ .

Dado  $n \in \mathbb{N}$  definimos la función  $F_n : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p\mathbb{R}^n$  mediante  $F_n(u) = D_u|_p$  donde

$$D_u|_p(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hu) - f(p)}{h}$$

hace referencia a la derivada direccional de  $f \in C_p^\infty(M)$  en  $p$ . Recordando la igualdad

$$D_u|_p f = \nabla f \cdot u$$

para funciones en  $f_p \in C^1(\mathbb{R}^n)$  podemos ver que  $D_u|_p$  es lineal y satisface la regla de Leibniz en  $p$ , siendo por tanto derivación en  $p$ . También podemos ver que  $D_{u+v}|_p = D_u|_p + D_v|_p$  y  $D_{\lambda u}|_p = \lambda D_u|_p$ , de modo que  $F_n$  es lineal. Como la función  $F_n$  lleva al  $i$ -ésimo vector canónico  $e_i$  a la  $i$ -ésima derivada parcial en  $p$   $\frac{\partial}{\partial y_i}|_p$  entonces tenemos un isomorfismo lineal

$$\mathbb{R}^n \cong T_p\mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Por la observación 2.1.9 y el ejemplo 2.1.5, si  $V$  es  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  entonces es difeomorfo mediante la carta global  $x$  a  $\mathbb{R}^n$ . Del corolario 2.2.1, los espacios tangentes son isomorfos como  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales. Por lo tanto se tiene el isomorfismo lineal

$$T_v V \cong T_{x(p)}\mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

De 2.1, 2.2 y el hecho de que  $x$  también es isomorfismo lineal se tiene el siguiente isomorfismo lineal para todo  $v \in V$

$$V \cong T_v V$$

Continuando con el ejemplo, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es suave entonces, por el isomorfismo anterior, su función tangente en  $p \in \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal  $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $g \in C_{f(p)}^\infty(\mathbb{R}^m)$  se tiene por regla de la cadena que

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_i}|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_i}|_p \frac{\partial g}{\partial y_j}|_{f(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y_i}|_p \frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(p)}(g)$$

Por lo tanto, la matriz asociada a  $D$  tiene en la entrada  $(i, j)$  al valor

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_i} \Big|_p$$

y así  $D$  no es más que la derivada habitual  $D_p f$  de la función  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} T_p \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_p f} & T_{f(p)} \mathbb{R}^m \\ F_n \uparrow & & \downarrow F_m^{-1} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D_p f} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

**Observación 2.2.7.** Sea  $M$  variedad suave y  $p \in M$ . Considerando el germen  $[f] \in C_p^\infty$  en  $p$  con  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  función suave, podemos tomar un representante de la clase  $[f]$  que esté definido globalmente. El esbozo de una prueba va como sigue: Dado que  $M$  es localmente compacto, existe un compacto  $V \subseteq U$  tal que  $p \in \text{int}(V)$ . A consecuencia de la paracompacidad de  $M$  va a existir una partición de la unidad y por ello podemos dar una función suave  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{f}|_{\text{int}(V)} = f|_{\text{int}(V)}$ . Por lo tanto  $[\tilde{f}] = [f]$  y así  $[f]$  tiene un representante  $\tilde{f}$  en  $C^\infty(M)$ .

En lo que resta del trabajo del tesis, consideraremos a los vectores en  $T_p M$  como derivaciones de  $C^\infty(M)$  en  $p$ , en lugar de derivaciones de  $C_p^\infty(M)$  en  $p$ .

Para finalizar la sección notemos que el funtor tangente puntual se comporta bien con los productos finitos.

**Proposición 2.2.9.** Sean  $M, N$  variedades suaves con  $p \in M$  y  $q \in N$ . Entonces

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \times T_q N$$

*Demostración.* Sea la función  $F : T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_p M \times T_q N$  dada por

$$F(v) = (T_{(p,q)} \pi_M(v), T_{(p,q)} \pi_N(v))$$

$F$  es lineal porque es producto de transformaciones lineales.

Definimos las funciones  $i_M : M \rightarrow M \times N$  y  $i_N : N \rightarrow M \times N$  mediante  $i_M(x) = (x, q)$  y  $i_N(y) = (p, y)$ . También definimos a la función  $G : T_p M \times T_q N \rightarrow T_{(p,q)}(M \times N)$  dada por

$$G(v, w) = T_p i_M(v) + T_q i_N(w)$$

Veamos que  $F$  es suprayectiva

$$(F \circ G)(v, w) = F(T_p i_M(v) + T_q i_N(w)) = (T_{(p,q)} \pi_M(T_p i_M(v) + T_q i_N(w)), T_{(p,q)} \pi_N(T_p i_M(v) + T_q i_N(w)))$$

Empleando regla de la cadena y la linealidad obtenemos

$$(F \circ G)(v, w) = (T_p(\pi_M \circ i_M)(v) + T_q(\pi_M \circ i_N(w)), T_p(\pi_N \circ i_M)(v) + T_q(\pi_N \circ i_N)(w))$$

Como  $\pi_N \circ i_M$  y  $\pi_M \circ i_N$  son constantes, y se tienen las igualdades  $\pi_M \circ i_M = 1_M$  y  $\pi_N \circ i_N = 1_N$ , entonces

$$(F \circ G)(v, w) = (T_p 1_M(v), T_q 1_N(w)) = (v, w)$$

Por ser  $F$  transformación lineal suprayectiva entre espacios vectoriales de la misma dimensión concluimos que  $F$  es un isomorfismo.  $\square$

## 2.3. Campos vectoriales

Un campo vectorial va a ser una función que asigna a cada punto  $p$  en una variedad  $M$  un vector en su espacio tangente  $T_p M$ . Al desear que la asignación sea suave es que debemos pararnos a considerar una estructura de variedad suave sobre la unión disjunta de los espacios tangentes. En esta sección presentamos al haz tangente de una variedad y estudiaremos a los campos vectoriales.

**Definición 2.3.1.** Sean  $\{X_i\}_{i \in I}$  una colección de conjuntos. La unión disjunta de los conjuntos es el conjunto

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\}) \quad (2.3)$$

**Observación 2.3.1.** La unión disjunta 2.3 corresponde al coproducto de  $\{X_i\}_{i \in I}$  en **Set**. Por el dual de la proposición 1.3.4, se tiene la unicidad salvo isomorfismos.

**Definición 2.3.2** (Haz tangente). El haz tangente de una variedad suave  $M$  es la unión disjunta de los espacios tangentes. Esto es,

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

La proyección en el haz tangente es la función  $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$  dada por  $\pi_{TM}(v) = p$  cuando  $v \in T_p M$ .

**Proposición 2.3.1.** Si  $M$  es  $n$ -variedad suave, entonces el haz tangente  $TM$  tiene estructura de  $2n$ -variedad suave con la que  $\pi_{TM}$  es suave.

*Demostración.* Lo más destacado de la demostración es que dado un atlas  $\{(U_\alpha, x = (x_1^{(\alpha)}, \dots, x_n^{(\alpha)}))\}_{\alpha \in A}$  de  $M$ , se construye un atlas  $\{(\pi^{-1}[U_\alpha], \tilde{x} := (x_1^{(\alpha)} \circ \pi, \dots, x_n^{(\alpha)} \circ \pi, dx_1, \dots, dx_n))\}_{\alpha \in A}$  de  $TM$ . La demostración se puede leer como la proposición 2.55 de [Lee09].  $\square$

**Definición 2.3.3** (Levantamiento tangente). Si  $f : M \rightarrow N$  es suave, entonces definimos el levantamiento tangente de  $f$  como la función  $Tf : TM \rightarrow TN$  dada por  $(Tf)(v) = (T_p f)(v)$  para  $v \in T_p M$ .

**Proposición 2.3.2.** Si  $f : M \rightarrow N$  es suave entonces  $Tf : TM \rightarrow TN$  es suave.

*Demostración.* Supongamos que  $M$  de dimensión  $m$  y  $N$  tiene dimensión  $n$ . Notemos que si  $p \in M$  tiene carta  $(U, x)$  y  $f(p) \in N$  tiene carta  $(V, y)$  entonces por la proposición 2.2.6 se tiene

$$T_p f \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})_j}{\partial z_i} \Big|_{x(p)} \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(p)}$$

De modo que si  $(u, v) \in x[U] \times \pi^{-1}[U] \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  con  $x^{-1}(u) = p$  y usando el atlas que nos proporciona la demostración de 2.3.1 entonces

$$(\tilde{y} \circ Tf \circ \tilde{x}^{-1})(u, v) = (y_1(f(p)), \dots, y_n(f(p)), \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})_1}{\partial z_i}, \dots, \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial(y \circ f \circ x^{-1})_n}{\partial z_i}) \quad (2.4)$$

y se sigue que la función 2.4 es suave pues coordenada a coordenada lo es ya que  $f$  es suave.  $\square$

**Definición 2.3.4** (Funtor tangente). El funtor tangente  $T : \mathbf{Man} \rightarrow \mathbf{Man}$  asigna a cada variedad  $M$  la variedad  $TM$ , y a cada función suave  $f : M \rightarrow N$  le asigna el levantamiento tangente  $Tf : TM \rightarrow TN$ .

**Definición 2.3.5** (Campo vectorial). Un campo vectorial suave en  $M$  es una sección de  $\pi_{TM}$  en  $\mathbf{Man}$ . Se acostumbra a escribir  $X_p$  en lugar de  $X(p)$ , y a denotar por  $\mathfrak{X}(M)$  a la colección de campos vectoriales en  $M$ .

**Observación 2.3.2.** Sea  $M$  una variedad suave, una función  $f \in C^\infty(M)$  y un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Podemos definir la función  $X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(X(f))(p) = X_p(f)$$

A veces denotamos a  $X(f)$  por  $Xf$  para no sobrecargar la notación.

**Observación 2.3.3.** Si  $M$  es  $n$ -variedad suave con  $(U, x)$  carta en  $p \in M$  entonces en  $U$  tenemos la función  $\frac{\partial}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathfrak{X}(U)$  dado por  $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$  entonces

$$X|_U(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad (2.5)$$

para ciertas funciones  $X_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  que se conocen como las componentes del campo  $X$  según la carta  $(U, x)$ .

**Lema 2.3.1.** Sea  $X : M \rightarrow TM$  una sección en **Set** con  $M$  una  $n$ -variedad. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $X$  es suave.
2. Las componentes  $X_i$  de  $X$  según  $(U, x)$  en 2.5 son de clase  $C^\infty$  para toda carta  $(U, x)$ .
3. Si  $f \in C^\infty(M)$  entonces  $X(f) \in C^\infty(M)$

*Demostración.* Si  $X$  es suave y  $(U, x)$  es carta de  $M$  entonces  $X|_U$  es suave y

$$dx_i \circ X|_U = dx_i \left( \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = X_i$$

es de clase  $C^\infty$ .

Si cada  $X_i$  es suave y  $f \in C^\infty(M)$  entonces

$$X(f)|_U = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

es suma de productos de funciones suaves y por tanto  $X(f)|_U$  es suave para toda carta  $(U, x)$  y así  $X(f)$  es suave.

Por último, si  $X(f)$  es suave para cualquier  $f \in C^\infty(M)$  entonces para la carta  $(U, (x_1, \dots, x_n))$  de  $M$  tenemos que

$$dx_i \circ X|_U = X(x_i)$$

es suave porque por la observación 2.1.9 se sigue que  $x_i \in C^\infty(U)$ . Como además,  $x_i \circ \pi \circ X|_U = x_i \in C^\infty(U)$  entonces  $X|_U$  es suave y, como la carta fue cualquiera, concluimos que  $X$  es suave en  $M$ .  $\square$

**Observación 2.3.4.** Por las equivalencias del lema 2.3.1, podemos ver a un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  como una función  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  que envía a cada  $f \in C^\infty(M)$  a  $Xf \in C^\infty(M)$ .

Dados dos campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , podemos construir un tercer campo vectorial conocido como el conmutador de los campos. Más adelante veremos el significado geométrico de este nuevo campo.

**Definición 2.3.6** (Conmutador). Sea  $M$  variedad y  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  campos vectoriales. Definimos el conmutador de los campos vectoriales  $X$  y  $Y$  como el campo vectorial  $[X, Y] : M \rightarrow TM$  dado por

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

para cualesquiera  $f \in C^\infty(M)$ .

**Proposición 2.3.3.** *El campo vectorial  $[X, Y]$  de la definición 2.3.6 está bien definido.*

*Demostración.* Tenemos que ver que si  $p \in M$  entonces  $[X, Y]_p \in T_p M$ , lo que significa que es una derivación en  $p$ . Esto es cierto ya que si tomamos  $f, g \in C^\infty(M)$  se tiene

$$[X, Y]_p(fg) = X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) = X_p(Yf \cdot g + f \cdot Yg) - Y_p(Xf \cdot g + f \cdot Xg)$$

Donde que se uso que  $Y_p$  es derivación y por tanto  $Y(fg) = Y(f) \cdot g + f \cdot Y(g)$ . Haciendo lo mismo con  $X$  se sigue que  $[X, Y]_p(fg)$  es igual a

$$X_p(Yf) \cdot g(p) + Y_p f \cdot X_p g + X_p f \cdot Y_p g + f(p) \cdot X_p(Yg) - Y_p(Xf) \cdot g(p) - X_p f \cdot Y_p g - Y_p f \cdot X_p g - f(p) \cdot Y_p(Xg)$$

y eliminando a los términos correspondientes

$$[X, Y]_p(fg) = f(p)(X_p(Yg) - Y_p(Xg)) + g(p)(X_p(Yf) - Y_p(Xf)) = f(p) \cdot [X, Y]_p(g) + g(p) \cdot [X, Y]_p(f)$$

Concluyendo que  $[X, Y]_p$  es en efecto una derivación.  $\square$

**Observación 2.3.5.** *Sea  $M$  variedad suave con carta  $(U, x = (x_1, \dots, x_n))$ . Si tomamos los campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  entonces en  $U$  tienen la forma local  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  y  $Y = \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . De este modo, para  $f \in C^\infty(M)$  el corchete de Lie en  $U$  es*

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} - Y_j X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_j} (f) \end{aligned}$$

Podemos concluir que la expresión local del campo  $[X, Y]$  en la carta  $(U, x)$  es

$$[X, Y] = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Dado un campo vectorial  $X$  y un punto  $p$  en la variedad  $M$ , es posible hallar una curva  $\gamma$  que pase por  $p$  cuyo 'campo de velocidades' sea  $X$ . Dicha curva se conocerá como una curva integral de  $X$ .

Por  $I$  nos referiremos a un intervalo en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.3.7** (Curva suave). Sea  $M$  variedad suave. Una curva en  $M$  es una función  $\gamma : I \rightarrow M$  de clase  $C^\infty$ .

Si  $0 \in I$  y  $\gamma(0) = p$  entonces diremos que la curva  $\gamma$  comienza en  $p$ .

**Observación 2.3.6.** Sea  $\gamma$  una curva sobre la variedad suave  $M$ . El levantamiento tangente  $T\gamma : TI \rightarrow TM$  puede identificarse con una función

$$\dot{\gamma} : I \rightarrow TM$$

dada por  $\dot{\gamma}(s) = T_s\gamma(\frac{\partial}{\partial t}|_s)$ . También es común escribir  $\gamma'$  en lugar de  $\dot{\gamma}$

**Definición 2.3.8** (Curva integral). Sea  $M$  variedad y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Una curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  es curva integral de  $X$  si

$$\forall t \in I (X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t))$$

**Teorema 2.3.1** (Existencia y unicidad de curvas integrales). Sea  $M$  variedad suave y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Para cada  $p \in M$  existe  $\epsilon > 0$  y una curva suave  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  en  $M$  que comienza en  $p$  y es curva integral.

*Demostración.* Sea  $(U, x = (x_1, \dots, x_n))$  carta de  $M$  en  $p$ . Entonces la condición de que  $\gamma$  sea integral es lo mismo a pedir que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} (\dot{\gamma}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\gamma(t)} = X_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\gamma(t)})$$

Es decir, tenemos el sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\gamma}_i = X_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

con condición inicial  $\dot{\gamma}(0) = (X_1(p), \dots, X_n(p))$ . Como se puede consultar en cualquier libro de la materia, existe una única solución suave definida en una vecindad del cero para el sistema.  $\square$

**Definición 2.3.9** (Curva integral maximal). Sea  $M$  variedad suave,  $p \in M$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  campo vectorial. Una curva integral  $\gamma : I \rightarrow M$  de  $M$  que inicia en  $p$  es una curva integral maximal si para cualquier otra curva integral  $\gamma' : J \rightarrow M$  de  $M$  que inicia en  $p$  se tiene  $J \subseteq I$ .

**Teorema 2.3.2.** Sea  $M$  variedad suave y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  campo vectorial. Entonces existe una única curva integral maximal  $\gamma_p : I_p \rightarrow M$  de  $M$  que inicia en  $p$ .

**Observación 2.3.7.** Usando la notación del teorema 2.3.2, dado  $t \in \mathbb{R}$ , definimos el conjunto

$$D_t(X) := \{p \in M : t \in I_p\}$$

**Definición 2.3.10** (Flujo de un campo vectorial). *Usando la notación del teorema 2.3.2, el flujo del campo vectorial  $X$  es la función  $\phi_X^t : D_t(X) \rightarrow M$  dada por*

$$\phi_X^t(p) = \gamma_p(t)$$

**Definición 2.3.11** (Campo vectorial completo). *Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es completo si*

$$\forall t \in \mathbb{R} (D_t(X) = M)$$

Damos una condición suficiente y necesaria para que una función suave respete los flujos.

**Definición 2.3.12.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  función suave. Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  está  $f$ -relacionado con el campo  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  si*

$$\forall p \in M (Y_{f(p)} = T_p f(X_p))$$

*Dicho de otro manera, el campo  $X$  está  $f$ -relacionado con el campo  $Y$  si el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ X \downarrow & & \downarrow Y \\ TM & \xrightarrow{Tf} & TN \end{array}$$

*Mediante  $X \sim_f Y$  denotamos que el campo  $X$  está  $f$ -relacionado con  $Y$ .*

**Proposición 2.3.4.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  función suave y consideremos los campos vectoriales  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ . Entonces  $X \sim_f Y$  si y sólo si para cada curva integral  $\gamma$  de  $X$  en  $p \in M$  se tiene que  $f \circ \gamma$  es curva integral de  $Y$  en  $f(p) \in N$*

*Demostración.* Si  $X \sim_f Y$  y  $\gamma : I \rightarrow M$  es curva integral de  $X$  en  $p$  entonces para  $t \in I$  se tiene

$$(f \circ \gamma)'(t) = T_t(f \circ \gamma)\left(\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_t\right) = T_{\gamma(t)}f \circ T_t\gamma\left(\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_t\right) = T_{\gamma(t)}f \circ X_{\gamma(t)} = Y_{f(\gamma(t))} = Y_{(f \circ \gamma)(t)} \quad (2.6)$$

donde en la cuarta igualdad de 2.6 se debe a que  $X \sim_f Y$ . Por tanto  $f \circ \gamma$  es curva integral de  $Y$  en  $f(\gamma(0)) = f(p)$ .

Conversamente, si  $p \in M$  y  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  es curva integral de  $M$  en  $p$  entonces como  $f \circ \gamma$  es curva integral en  $N$  en  $f(p)$  y se tiene que

$$Y_{f(p)} = (f \circ \gamma)'(0) = T_p f(\dot{\gamma}(0)) = T_p \gamma f(X_p)$$

Por tanto concluimos que  $X \sim_f Y$ . □

## 2.4. Subvariedades

Al considerar una variedad diferenciable  $M$ , definimos una subvariedad  $N$  de  $M$  como un subconjunto que, por sí mismo, es una variedad diferenciable. La estructura diferenciable de  $N$  puede ser directamente heredada de la de  $M$ , en cuyo caso  $N$  se denomina una subvariedad regular. Alternativamente, la estructura de  $N$  puede ser implantada en  $M$  en un sentido que se precisará más adelante al hablar de subvariedades inmersas. Esta sección se dedicará al estudio de las subvariedades y presentará teoremas para su construcción, destacando el papel del teorema del rango constante, para cuya demostración recordaremos el teorema de la función inversa.

**Definición 2.4.1** (Subvariedad regular). *Sea  $(M, \mathcal{A})$   $n$ -variedad suave y  $k \leq n$ . Un subconjunto  $N \subseteq M$  es una subvariedad regular de  $M$  de dimensión  $k$  si para todo  $p \in N$  existe una carta  $(U_p, x_p) \in \mathcal{A}$  tal que*

$$x_p[U_p \cap N] = x_p[U_p] \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\})$$

*En este caso,  $N$  es una  $k$ -variedad suave con atlas  $\mathcal{A}' = \{(U_p \cap N, \pi \circ x_p)\}_{p \in N}$ , donde  $\pi$  es la proyección de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^k$ .*

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $(M, \mathcal{A})$   $n$ -variedad suave. Si  $N \subseteq M$  es abierto entonces  $N$  es  $n$ -subvariedad regular de  $M$  y además*

$$\forall p \in N \quad (T_p N = T_p M)$$

*Demostración.* Si  $p \in N$  y  $(U, x)$  es carta de  $p$  en  $M$  entonces  $(U \cap N, x|_{U \cap N})$  es carta de  $p$  en  $N$ .

Como  $N$  es abierto en  $M$  entonces existe una vecindad  $V$  de  $p$  tal que  $U \subseteq N \subseteq M$ . En particular los conjuntos de germines  $C_p^\infty(M)$  y  $C_p^\infty(N)$  son iguales. Y por tanto  $T_p N = T_p M$ .  $\square$

**Definición 2.4.2** (Inmersión y sumersión). *Sea  $f : M \rightarrow N$  suave. Decimos que  $f$  es una:*

1. *inmersión si para todo  $p \in M$  se tiene que  $T_p f$  es inyectiva.*
2. *sumersión si para todo  $p \in M$  se tiene que  $T_p f$  es suprayectiva.*

**Definición 2.4.3** (Subvariedad inmersa y encajada). *Sea  $M$  variedad suave. Una pareja  $(N, \phi)$ , con  $N$  variedad y  $\phi : N \rightarrow M$  una inmersión inyectiva, es una subvariedad inmersa. En caso de que  $\phi : N \rightarrow \phi[N]$  sea un homeomorfismo, decimos que  $\phi$  es un encaje y que  $N$  es una subvariedad encajada.*

**Teorema 2.4.1** (Teorema de la función inversa). *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in \Omega$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$  con  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Si el jacobiano  $Jf$  de la función satisface*

$$\det(Jf(a)) \neq 0$$

entonces existen abiertos  $U \subseteq \Omega$  y  $V \subseteq f[\Omega]$  con  $a \in U$  y  $f(a) \in V$  tales que  $f|_U : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de clase  $C^k$ .

*Demostración.* La demostración se encuentra en cualquier buen libro de cálculo diferencial multivariable.  $\square$

**Definición 2.4.4** (Rango de una función). Sea  $f : M \rightarrow N$  función de clase  $C^k$  con  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .  $f$  tiene rango constante  $r$  en  $U \subseteq M$  si para todo  $q \in U$  la función tangente  $T_q f$  tiene rango  $r$ .

**Teorema 2.4.2** (Teorema del rango constante). Si  $f : M \rightarrow N$  es suave,  $p \in M$  y  $T_p f$  tiene rango constante  $r$  en una vecindad de  $p$  entonces existen una carta  $(U, \phi)$  en  $p$  y una carta  $(V, \psi)$  en  $f(p)$  tales que

$$(y \circ f \circ x^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

Además, tales cartas cumplen que  $\phi(p) = 0 = \psi(p)$ .

*Demostración.* El caso  $r = 0$  es trivialmente cierto. Por lo que supondremos  $r \neq 0$ .

Si  $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$  y  $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$  son cartas en  $p$  y  $f(p)$  respectivamente, entonces  $T_p(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1})$  tiene rango constante  $r$  por la proposición 2.2.8, el corolario 2.2.1 y el hecho de que los isomorfismos lineales respetan el rango. Por lo tanto, podemos únicamente demostrar el teorema para funciones suaves  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Además, como las traslaciones en  $\mathbb{R}^k$  son difeomorfismos, podemos suponer que la función  $f$  es de rango constante  $r$  en una vecindad de 0 con  $f(0) = 0$ .

Sea  $f : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  suave con rango constante  $r$  en una vecindad  $U'' \subset U'$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Reacomodando podemos suponer

$$\det\left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{i,j \in \{1, \dots, r\}^2}(0)\right) \neq 0 \quad (2.7)$$

Definimos la función  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  mediante

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = (f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_m)$$

Luego, el jacobiano de  $\phi$  tiene rango  $m$  en 0 por 2.7 y es un difeomorfismo local  $\phi|_U : U \rightarrow W$  con  $0 \in U \cap W$  y  $U \subseteq U''$  por 2.7. Por otro lado, la función

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, f_{r+1} \circ \phi^{-1}(x), \dots, f_m \circ \phi^{-1}(x))$$

es de rango  $r$  para todo  $x \in W$  y ello fuerza a que

$$\forall x \in W \forall (i, j) \in \{r+1, \dots, m\}^2 \left( \frac{\partial (f_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) \right) = 0$$

Dicho de otro modo,  $f_j \circ \phi^{-1}$  con  $j \in \{r+1, \dots, m\}$  no depende de las variables  $\{x_s\}_{s=r+1}^m$ .

Por tanto,  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1} - f_{r+1} \circ \phi^{-1}(x), \dots, x_n - f_n \circ \phi^{-1}(x))$$

tiene por jacobiano en 0 a una matriz triangular inferior que consta de unos en su diagonal y que es por tanto invertible. Como consecuencia del teorema de la función inversa 2.4.1,  $\psi|_V : V \rightarrow W'$  es un difeomorfismo local en 0.

Finalmente,

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

y se consiguen las cartas que proporcionan la igualdad deseada.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \phi^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi \\ W & \longrightarrow & W' \end{array}$$

□

**Corolario 2.4.1.** Si  $(N, \phi)$  es  $n$ -subvariedad inmersa de la  $m$ -variedad  $M$  y  $p \in N$  entonces existen una vecindad  $U$  de  $p$  en  $N$  y una carta  $(V, x)$  de  $\phi(p)$  en  $N$  tales que

$$\phi[U] = \{q \in V : x_{n+1}(p) = \dots = x_m(p) = 0\}$$

donde  $n = \dim(N)$ .

*Demostración.* Como  $i$  es inmersión entonces tiene rango constante  $n$ . Por el teorema de rango constante 2.4.2 existen cartas  $(U, y)$  en  $p$  y  $(V, x)$  en  $f(p)$  tales que  $y \circ \phi \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es la función inclusión. Notando que  $y \circ \phi[U]$  son aquellos puntos de  $y[V]$  con las últimas  $m-n$  coordenadas iguales a cero se tiene la igualdad deseada. □

**Corolario 2.4.2.** Si  $(N, \phi)$  es subvariedad encajada de la variedad  $M$  entonces  $\phi[N]$  es subvariedad regular de  $N$ .

*Demostración.* Sean  $p \in N$ , la vecindad  $U$  de  $p$  y  $(V, x)$  carta como en el corolario 2.4.1. Por ser  $\phi$  encaje se tiene que  $\phi[U]$  es abierto de  $\phi[N]$  con la topología de subespacio. Por lo tanto existe  $V' \subseteq M$  abierto tal que  $\phi[U] = V' \cap \phi[N]$ . Si tomamos  $W := V \cap V'$  entonces se cumple

$$\phi[N] \cap W = \{q \in W : x_{n+1}(q) = \dots = x_m(q) = 0\}$$

De que modo que

$$x[\phi[N] \cap V] = x[V] \cap (\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\})$$

y concluimos que  $\phi[N]$  es subvariedad regular de  $M$ .  $\square$

**Observación 2.4.1.** Sean  $N$   $n$ -subvariedad regular de la  $m$ -variedad  $M$  y  $p \in N$ . Consideremos a la función inclusión  $i : N \rightarrow M$  y  $(U, x)$  carta de  $p$  en  $M$  tal que  $(U \cap N, \pi \circ x)$  es carta de  $p$  en  $N$  con  $x[U \cap N] = x[U] \cap \{\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\}\}$ . Si tomamos  $(j, k) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ , se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial(\pi \circ x)_j} \Big|_p(x_k) = \frac{\partial(x_k \circ (\pi \circ x_j)^{-1})}{\partial y_j} \Big|_{\pi \circ x(p)} = \delta_{jk}$$

y por la proposición 2.2.6 se sigue para  $j \in \{1, \dots, n\}$  que

$$T_p i \left( \frac{\partial}{\partial(\pi \circ x)_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$$

De modo que  $T_p i$  es función inyectiva y podemos identificar a  $T_p N$  con el subespacio de  $T_p M$  generado por  $\{\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p\}_{j=1}^n$ . Además, como  $i$  es inyectiva y es homeomorfa a su imagen entonces  $(N, i)$  es una subvariedad encajada.

En general, si  $(N, \phi)$  es subvariedad inmersa entonces por ser  $\phi$  inyectiva podemos identificar a  $T_p N$  con el subespacio  $T_p \phi[T_p N]$  de  $T_{\phi(p)} M$ .

**Definición 2.4.5** (Punto regular). Sea  $f : M \rightarrow N$  suave y  $p \in M$ .  $p$  es un punto regular de  $f$  si  $T_p M$  es suprayectiva.

**Definición 2.4.6** (Valor regular). Sea  $f : M \rightarrow N$  suave y  $q \in N$ .  $q$  es un valor regular de  $f$  si todo punto  $p \in f^{-1}[\{q\}]$  es un punto regular.

El siguiente teorema nos dice que los conjuntos de nivel de valores regulares tienen estructura de variedad suave.

**Teorema 2.4.3.** Sea  $f : M \rightarrow N$  suave y  $q \in N$  un valor regular de  $f$ . Entonces  $f^{-1}[\{q\}]$  es una subvariedad regular de dimensión  $\dim(M) - \dim(N)$ . Además, para todo  $p \in f^{-1}[\{q\}]$  se tiene

$$T_p(f^{-1}[\{q\}]) = \text{Ker}(T_p f)$$

*Demostración.* Supongamos  $m = \dim(M)$  y  $n = \dim(N)$ . Por ser  $q$  valor regular de  $f$  se tiene para  $p \in f^{-1}[\{q\}]$  que  $T_p f$  es suprayectiva y por tanto  $T_{x'(p)}(y' \circ f \circ x'^{-1})$  es suprayectiva para cualesquiera carta  $(U', x')$  de  $p$  y carta  $(V', y')$  de  $f(p)$ . Luego, por el teorema de la función inversa, existe una vecindad  $U_p$  de  $p$  tal que  $f$  es sumersión en dicha vecindad. Si hacemos la unión  $O = \bigcup_{p \in f^{-1}[\{q\}]} U_p$  entonces se consigue un abierto tal que  $f^{-1}[\{q\}] \subseteq O$  y  $f|_O$  es sumersión y por tanto es función con rango constante  $n$ . Usando el teorema del rango constante 2.4.2 podemos hallar cartas  $(U, x)$  de  $p$  y  $(V, y)$  de  $q$  tales que  $y \circ f \circ x^{-1}$  es la proyección de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto

$$f^{-1}[\{q\}] \cap U = \{p \in U : x_1(p) = \dots = x_n(p) = 0\}$$

y así  $f^{-1}[\{q\}]$  es subvariedad regular de dimensión  $m - n$  y por la observación 2.4.1 la pareja  $(f^{-1}[\{q\}], i)$ , con  $i$  la inclusión en  $M$ , es una subvariedad encajada.

También por la observación 2.4.1, el espacio tangente  $T_p(f^{-1}[\{q\}])$  es el subespacio de  $T_p M$  generado por  $\{\frac{\partial}{\partial x_j}|_p\}_{j=n+1}^m$ . Dado que para  $j \in \{n+1, \dots, m\}$  se tiene por la proposición 2.2.6 que

$$T_p f(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial(y_k \circ f \circ x^{-1})}{\partial z_j}|_{x(p)} \frac{\partial}{\partial y_k}|_q = 0$$

entonces  $\text{Ker}(T_p f) = \langle \{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j=n+1}^m \rangle = T_p(f^{-1}[\{q\}])$ .  $\square$

**Observación 2.4.2** (Codimensión). *Si  $N \subseteq M$  es variedad de  $M$  entonces la codimensión de  $N$  en  $M$  es  $\dim(M) - \dim(N)$ . El teorema 2.4.3 diría que la imagen inversa de un valor regular es una subvariedad de dimensión igual a la codimensión de  $N$  en  $M$ .*

Podemos generalizar el teorema 2.4.3.

**Teorema 2.4.4.** *Sean  $M$  y  $N$  variedades suaves,  $p \in N$ , y  $f : M \rightarrow N$  suave. Si para algún  $k \in \mathbb{N}$  y cada  $p \in f^{-1}[\{q\}]$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  donde  $f$  tiene rango constante  $k$  entonces  $f^{-1}[\{q\}]$  es una subvariedad regular de  $M$  de codimensión  $k$ . Además, si  $p \in f^{-1}[\{q\}]$  entonces se cumple la igualdad*

$$T_p(f^{-1}[\{q\}]) = \text{Ker}(T_p f)$$

*Demostración.* La demostración es similar a del teorema 2.4.3.  $\square$

Dos subvariedades  $(N, \phi)$  y  $(N', \phi')$  en  $M$  pueden representar el mismo subconjunto de  $M$  y hasta coincidir  $\phi[N]$  y  $\phi'[N']$  en su estructura suave. Esto motiva la definición de subvariedades equivalentes.

**Definición 2.4.7.** *Dos subvariedades  $(N_1, \phi_1)$  y  $(N_2, \phi_2)$  de  $M$  son equivalentes si existe un difeomorfismo  $\psi : N_1 \rightarrow N_2$  tal que*

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\phi_1} & M \\ & \searrow \psi & \uparrow \phi_2 \\ & & N_2 \end{array}$$

**Observación 2.4.3.** *Si  $(N, \phi)$  es subvariedad de  $M$  entonces  $\phi[N]$  hereda de  $N$  una única estructura suave que convierte a la función  $\hat{\phi} : N \rightarrow \phi[N]$ , dada por  $\hat{\phi}(p) = \phi(p)$ , es un difeomorfismo. Si  $i : \phi[N] \rightarrow M$  es la inclusión entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\phi} & M \\ & \searrow \hat{\phi} & \uparrow i \\ & & \phi[N] \end{array}$$

y de este modo toda subvariedad de  $M$  tiene un representante  $(A, i)$  con  $A \subseteq M$  e  $i : A \rightarrow M$  la función inclusión. Cabe la pena resaltar que en general la topología de  $A$  será distinta de la topología de subespacio.

**Definición 2.4.8** (Subvariedad regularmente inmersa). *Una subvariedad  $(N, \phi)$  de  $M$  es una subvariedad regularmente inmersa si para cada función suave  $\psi : P \rightarrow M$ , con  $\psi[P] \subseteq \phi[N]$ , existe una única función suave  $\tilde{\psi} : P \rightarrow N$  tal que*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\psi} & M \\ & \searrow \tilde{\psi} & \uparrow \phi \\ & & N \end{array} \quad (2.8)$$

**Observación 2.4.4.** *Siguiendo la notación de la definición 2.4.8, existe una única función  $\tilde{\psi}$  inducida por  $\psi$  que hace conmutar el diagrama 2.8 puesto que  $\phi$  es función inyectiva. Explícitamente,*

$$\tilde{\psi}(x) = \phi^{-1} \circ \psi(x)$$

*En una subvariedad regularmente inmersa está única función que levanta a  $\psi$ , es suave.*

## 2.5. Cubrientes y distribuciones

En esta sección introducimos conceptos y resultados que servirán más adelante en la demostración de los teoremas de Lie.

**Definición 2.5.1** (Espacio cubriente). *Sea  $M$  variedad de clase  $C^r$ . Un espacio cubriente de  $M$  de clase  $C^r$  es un triplete  $(\tilde{M}, p, M)$  con  $\tilde{M}$  variedad de clase  $C^r$  y  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  una función suprayectiva de clase  $C^r$  tal que para cualquier  $q \in M$  existe una vecindad conexa  $U$  de  $q$  tal que para cada componente conexa  $U_i$  de  $p^{-1}[U]$ , la restricción  $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$  es un  $C^r$ -difeomorfismo.*

*Además, diremos que  $p$  es una función cubriente de clase  $C^r$ . Un espacio cubriente de clase  $C^\infty$  es un espacio cubriente suave.*

**Ejemplo 2.5.1** (Cubriente de la circunferencia unitaria). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  la función suprayectiva dada por  $f(t) = e^{it}$ . Entonces el triplete  $(\mathbb{R}, f, \mathbb{S}^1)$  es un espacio cubriente suave pues, siguiendo la notación del ejemplo 2.1.1, si  $z_0 \in \mathbb{S}^1$  entonces las componentes conexas de  $f^{-1}[U_{z_0}]$  son  $\{V_k = (\arg(z_0) - 2\pi k, \arg(z_0) + 2\pi k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  y  $f|_{V_k} : V_k \rightarrow U_{z_0}$  es un difeomorfismo para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .*

**Teorema 2.5.1.** *Si  $M$  es variedad suave y  $(\tilde{M}, p, M)$  es espacio cubriente de clase  $C^0$  entonces existe una única estructura diferenciable para  $\tilde{M}$  con la que  $p$  es suave.*

*Demostración.* Se puede leer como el teorema 1.86 de [Lee09]. □

**Observación 2.5.1** (Categoría de espacios cubrientes). *Dada una variedad suave  $M$ , podemos considerar la categoría  $\mathbf{Cub}^r(M)$  cuyos objetos son espacios cubrientes de  $M$  de clase  $C^r$ . Un morfismo entre los espacios cubrientes  $(\widetilde{M}_1, p_1, M_1)$  y  $(\widetilde{M}_2, p_2, M_2)$  de clase  $C^r$  es un par de funciones  $(\widetilde{f}, f)$  de clase  $C^r$  tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}_2 & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{M}_1 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

**Definición 2.5.2** (Espacio simplemente conexo). *Un espacio topológico  $X$  es simplemente conexo si es conexo por caminos y*

$$\forall x \in X \quad (\pi_1(X, x) = \{e\})$$

donde  $\pi_1(X, x)$  denota al grupo fundamental de  $X$  con punto base  $x$ .

**Teorema 2.5.2** (Cubriente universal). *Si  $M$  es variedad suave conexa entonces existe un espacio cubriente de  $M$  de clase  $C^0$  que es simplemente conexo. Tal cubriente es único salvo isomorfismos y se conoce como el cubriente universal de  $M$ .*

*Demostración.* El resultado se puede leer como el corolario 10.41 en [Rot13], el cual a su vez se sigue del teorema 10.34 en el mismo libro. Lo más destacado de la demostración es que dado  $x_0 \in M$ , podemos decir que dos funciones  $f, g : I \rightarrow M$  con  $I$  el intervalo unitario  $[0, 1]$  están relacionadas si y sólo si  $f(0) = x_0 = g(0)$ ,  $f(1) = g(1)$  y  $f, g$  son caminos homotópicos. La relación anterior resulta ser de equivalencia y así el cubriente universal de  $M$  resultará ser el conjunto de clases de equivalencia  $\widetilde{M} := \{[f] \mid f : I \rightarrow M\}$  equipado con una topología adecuada. La correspondiente función cubriente será  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  dada por  $p([f]) = f(1)$ .  $\square$

El teorema de Frobenius será de utilidad en la demostración de los teoremas de Lie pero enunciarlo requiere la presentación de conceptos previos como el de foliación y distribución. La idea de una distribución  $k$ -dimensional es asociar a cada punto  $p$  de la variedad un subespacio  $D_p$  del espacio tangente  $T_p M$  de dimensión  $k$ . El teorema de Frobenius da condiciones necesarias y suficientes para que el problema de hallar una subvariedad  $N$ , descrita como la hoja de una foliación  $\mathcal{F}$ , que satisfaga  $T_p N = D_p$  con  $p \in N$  tenga solución. De cierto modo estamos generalizando la formulación geométrica de resolver ecuaciones diferenciales parciales, con las foliaciones siendo análogas a las curvas características.

**Definición 2.5.3** (Foliación). *Sea  $M$  variedad suave de dimensión  $n$ . Una foliación  $k$ -dimensional  $\mathcal{F}$  de  $M$  es una descomposición  $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  en subconjuntos disjuntos conexos por caminos que satisfacen la siguiente propiedad: Dado  $p \in M$ , existe una carta  $(U, \phi)$  de  $M$  en  $p$  tal que las*

componentes conexas de  $L_\alpha \cap U$  son los conjuntos

$$\{p \in U : \phi(x) \in \mathbb{R}^k \times \{c_\alpha\}\}$$

con  $c_\alpha \in \mathbb{R}^{n-k}$  constante fija. A las componentes conexas de  $L_\alpha$  las llamamos hojas de la foliación  $\mathcal{F}$ , a la carta  $(U, \phi)$  descrita arriba se le llama carta foliada y las componentes conexas de  $U \cap L_\alpha$  son las placas de  $L_\alpha$ .

**Ejemplo 2.5.2.** Si  $\phi : M \rightarrow N$  es una sumersión entonces por el teorema del rango constante 2.4.2 se tiene que las componentes conexas de las fibras  $\phi^{-1}[\{q\}]$ , con  $q \in N$ , forman una foliación de  $M$  de codimensión igual a la dimensión de  $N$ .

**Proposición 2.5.1.** Sea  $\mathcal{F}$  foliación  $k$ -dimensional de  $M$ . Cada hoja  $L \in \mathcal{F}$  es una subvariedad de  $M$  regularmente inmersa de dimensión  $k$ .

*Demostración.* Se puede leer como la proposición 9.1 en [Fer24]. □

**Definición 2.5.4** (Distribución). Sea  $M$  variedad suave de dimensión  $n$  y  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Una distribución  $k$ -dimensional de  $M$  es una función  $D : M \rightarrow \mathbb{P}(TM)$  tal que para cada  $p \in M$  se tiene que  $D(p) = D_p$  es un subespacio de  $T_p M$  de dimensión  $k$ .

La distribución  $D$  es suave si para cada  $p \in M$  existen una vecindad  $U$  de  $p$  y campos vectoriales suaves  $\{X_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathfrak{X}(U)$  tales que

$$\forall q \in U \ (D_q = \langle X_1|_q, \dots, X_k|_q \rangle)$$

De aquí en adelante, cada que nos reframos a una distribución  $D$ , asumiremos que la distribución es suave.

**Definición 2.5.5** (Campo vectorial tangente a una distribución). Sea  $D$  distribución en  $M$ . Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es tangente a  $D$  si

$$\forall p \in M \ (X_p \in D_p)$$

Denotamos por  $\mathfrak{X}(D)$  al conjunto de campos vectoriales tangentes a  $D$ .

**Definición 2.5.6** (Variedad integrable). Sea  $D$  distribución en  $M$ .  $(N, \phi)$  es variedad integrable de  $D$  si

$$\forall p \in N \ (T_p \phi[T_p N] = D_p)$$

Dado  $p \in N$ , podemos decir que la subvariedad  $N$  integra a  $D$  en  $p$ .

**Observación 2.5.2.** Si  $\mathcal{F}$  es foliación en  $M$  entonces podemos construir una distribución en  $M$  como sigue: Dado  $p \in M$ , definimos

$$D_p := T_p L$$

con  $L \in \mathcal{F}$  la hoja a la que  $p$  pertenece. Denotamos a la distribución inducida por  $\mathcal{F}$  mediante  $T\mathcal{F}$  y escribiremos  $T_p \mathcal{F}$  en lugar de  $(T\mathcal{F})_p$ .

**Definición 2.5.7** (Distribución integrable). Sea  $D$  distribución en  $M$ .  $D$  es integrable si existe una foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$  tal que

$$D = T\mathcal{F}$$

**Definición 2.5.8** (Distribución involutiva). Una distribución  $D$  en  $M$  es involutiva si

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(D) \quad ([X, Y] \in \mathfrak{X}(D))$$

**Teorema 2.5.3** (Teorema de Frobenius). Sea  $D$  distribución.  $D$  es integrable si y sólo si  $D$  es involutiva. Además, en caso ser  $D$  integrable, la foliación  $\mathcal{F}$  que integra a  $D$  es única.

*Demostración.* Puede leerse como el teorema 13.1 de [Fer24]. □

## Capítulo 3

# Grupos y álgebras de Lie

El presente capítulo sienta las bases para comprender los Teoremas de Lie, explorando las dos estructuras algebraicas que estos vinculan: los grupos de Lie y las álgebras de Lie. Partiremos de la definición de objeto grupo en una categoría, un concepto que presenta como manifestaciones concretas tanto a los grupos topológicos como a los grupos de Lie. Seguidamente, ilustraremos estos objetos con ejemplos de grupos de Lie, haciendo una especial mención a los grupos de Lie lineales. El capítulo culminará con una exposición de las álgebras de Lie y la construcción del álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie.

### 3.1. Grupos objeto

Si queremos trasladar la noción de grupo a categorías nos encontramos con el problema de que la colección de objetos puede ser demasiado grande como para definir al grupo. Siendo un poco más formales, para definir un grupo se requiere de un conjunto, pero la colección de objetos de una categoría puede ser una clase. Por ello, estudiaremos el caso en que ciertos morfismos de una categoría tengan la estructura de grupo que conocemos.

**Definición 3.1.1** (Objeto grupo). *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con productos finitos y objeto terminal  $T$ . Un objeto  $G \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  es un objeto grupo en  $\mathcal{C}$  si existe un funtor  $\hat{K}_G : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Grp}$  tal que*

$$K_G = U_{\mathbf{Grp}} \circ \hat{K}_G$$

**Observación 3.1.1.** *Desglosando la definición 3.1.1, el funtor  $\hat{K}_G$  envía cada objeto  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  al grupo  $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G), m_X, i_X, e_X)$  en donde  $m_X : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)$  es la multiplicación del grupo correspondiente,  $i_X : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)$  es la función inverso multiplicativo y  $e_X : \{*\} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)$  es la función que asigna a  $*$  el neutro multiplicativo del grupo. Además, si  $\mu \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  entonces  $\hat{K}_G(\mu) = \mu^* : K_G(Y) \rightarrow K_G(X)$  es un homomorfismo*

de grupos, lo que quiere decir que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, G) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, G) & \xrightarrow{m_Y} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, G) \\ \mu^* \times \mu^* \downarrow & & \downarrow \mu^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) & \xrightarrow{m_X} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) \end{array} \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(Y, G) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, G) & \xrightarrow{i_Y} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, G) \\ \mu^* \downarrow & & \downarrow \mu^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) & \xrightarrow{i_X} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) \end{array} \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{e_Y} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, G) \\ 1_* \downarrow & & \downarrow \mu^* \\ \{*\} & \xrightarrow{e_X} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) \end{array} \quad (3.3)$$

Ahora bien,

1. El diagrama 3.1 nos dice que  $\hat{m} = \{m_X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  es una transformación natural entre  $K_G \times K_G$  y  $K_G$ . Pero por corolario 1.3.2 en el caso contravariante se tiene  $K_{G \times G} \cong K_G \times K_G$ . Y por el teorema 1.4.1 se tiene  $\text{Nat}(K_{G \times G}, K_G) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G \times G, G)$ . Por lo tanto  $\text{Nat}(K_G \times K_G, K_G) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G \times G, G)$  y a  $\hat{m}$  le corresponde un único  $\mathcal{C}$ -morfismo  $m : G \times G \rightarrow G$ . Siendo mas explícitos, si  $\alpha : K_G \times K_G \rightarrow K_{G \times G}$  es el isomorfismo entre los funtores entonces el  $\mathcal{C}$ -morfismo  $m$  se puede escribir como  $m = (\hat{m} \circ \alpha)_{G \times G}(1_{G \times G})$ .
2. El diagrama 3.2 nos dice que  $\hat{i} = \{i_X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  es una transformación natural entre  $K_G$  y  $K_G$ . Por teorema 1.4.1 se tiene que  $\text{Nat}(K_G, K_G) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G)$  y por tanto le corresponde a  $\hat{i}$  un único  $\mathcal{C}$ -morfismo  $i : G \rightarrow G$  dado por  $i = \hat{i}_G(1_G)$ .
3. Notando que se tiene un isomorfismo natural  $\beta : K_T \cong \Delta_{\{*\}}$ , definido de la única manera posible. El diagrama 3.3 nos dice que  $\hat{e} = \{e_X\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  es una transformación natural de  $\Delta_{\{*\}}$  a  $K_G$ . Luego por teorema 1.4.1 se tiene  $\text{Nat}(K_T, K_G) \cong \text{Nat}(\Delta_{\{*\}}, K_G) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, G)$  y así, a  $\hat{e}$  le corresponde un único  $\mathcal{C}$ -morfismo  $e : T \rightarrow G$  dado por  $(\hat{e} \circ \beta)_T(1_T)$ .

En resumen, hallamos tres  $\mathcal{C}$ -morfismos  $m, i$  y  $e$ . Estos morfismos se conocen como morfismos de estructura de  $G$ . Los morfismos de estructura dotan a  $G$  de lo que pareciera una estructura de grupo gracias a las propiedades que heredan los morfismos de la estructura de grupo en los  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)$ . De aquí, podemos dar la siguiente caracterización de objetos grupo.

**Teorema 3.1.1** (Caracterización de objetos grupo). *Sea  $\mathcal{C}$  categoría con productos finitos, objeto terminal  $T$  y  $G \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $G$  es un objeto grupo.

2. Existen los  $\mathcal{C}$ -morfismos

$$m : G \times G \rightarrow G$$

$$i : G \rightarrow G$$

$$e : T \rightarrow G$$

tales que los siguientes diagramas conmutan.

a)

$$\begin{array}{ccc} G \times (G \times G) & \xrightarrow{\sim} & (G \times G) \times G \xrightarrow{m \times 1_G} G \times G \\ 1_G \times m \downarrow & & \downarrow m \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccccc} T \times G & \xrightarrow{e \times 1_G} & G \times G & \xleftarrow{1_G \times e} & G \times T \\ & \searrow \pi_2 & \downarrow m & \swarrow \pi_1 & \\ & & G & & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{C}}(1_G)} & G \times G & \xrightarrow{1_G \times i} & G \times G \\ \downarrow & & & & \downarrow m \\ T & \xrightarrow{e} & & & G \end{array}$$

*Demostración.* El resultado es discutido en la página 75 de [Mac98].  $\square$

**Definición 3.1.2** (Morfismo de objetos grupo). Sean  $G, P$  objetos grupo de  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, G)$  es un morfismo de objetos grupo si  $\eta^{(f)} = \{f_* : \hat{K}_G(X) \rightarrow \hat{K}_P(X)\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  es una transformación natural tal que para cada  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P)$  es un homomorfismo de grupos.

Y ya que la composición de morfismos de grupos vuelve ser un morfismo de grupos entonces la composición vertical de morfismos de objetos grupo vuelve a ser transformación de objetos grupo y por tanto podemos definir a la categoría de objetos grupo como haremos a continuación.

**Definición 3.1.3** (Categoría de objetos grupo). Definimos la categoría de objetos grupo en  $\mathcal{C}$  como aquella categoría cuyos objetos son los objetos grupo en  $\mathcal{C}$  y cuyos morfismos son los homomorfismos de objeto grupo. Denotamos a esta categoría mediante  $\mathbf{Grp}(\mathcal{C})$ .

Así como caracterizamos a los objetos grupo mediante diagramas con reminiscencias a la definición de grupo, de la misma manera podemos caracterizar a los morfismos de objeto grupo.

**Teorema 3.1.2** (Caracterización de morfismos de objeto grupo). Sean  $G, P$  objetos grupo de  $\mathcal{C}$  y  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, P)$ .  $f$  es un morfismo de grupos objeto si y solo si los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{f \times f} & P \times P \\ m \downarrow & & \downarrow n \\ G & \xrightarrow{f} & P \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & P \\ i_G \downarrow & & \downarrow i_P \\ G & \xrightarrow{f} & P \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T & & \\ e_G \downarrow & \searrow e_P & \\ G & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

Donde  $(m, e_G, i_G)$  los morfismos de estructura de  $G$  que provee el teorema 3.1.1 y  $(n, i_P, e_P)$  los morfismos de estructura de  $P$  que nos da el mismo teorema.

*Demostración.* Si  $f$  es morfismo de objetos grupo entonces para  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  se tiene que  $(f_*)_X$  es homomorfismo de grupos y entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} K_{G \times G}(X) & \xleftarrow{\alpha} & K_G(X) \times K_G(X) & \xrightarrow{(f_*)_X \times (f_*)_X} & K_P(X) \times K_P(X) & \xleftarrow{\beta} & K_{P \times P}(X) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ & & K_G(X) & \xrightarrow{(f_*)_X} & K_P(X) & & \end{array}$$

Definiendo la transformación natural  $u : K_{G \times G} \rightarrow K_{P \times P}$ , dada por  $u_X = \beta \circ ((f_*)_X \times (f_*)_X) \circ \alpha$  en la componente  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K_{G \times G} & \xrightarrow{u} & K_{P \times P} \\ \hat{m} \circ \alpha \downarrow & & \downarrow \hat{n} \circ \beta^{-1} \\ K_G & \xrightarrow{f_*} & K_P \end{array} \quad (3.4)$$

Evaluando 3.4 en la componente  $G \times G$  en el morfismo  $1_{G \times G}$  se sigue, por teorema 1.4.1, que

$$f \circ m = (f_* \circ \hat{m} \circ \alpha)_{G \times G}(1_{G \times G}) = (\hat{n} \circ \beta^{-1} \circ u)_{G \times G}(1_{G \times G}) = (\hat{n} \circ \beta^{-1})_{G \times G} \circ (f \times f) = n \circ (f \times f) \quad (3.5)$$

donde la última igualdad en 3.5 se debe al diagrama 3.1. De forma similar se demuestran los diagramas conmutativos para el resto de morfismos de estructura.

Para la vuelta, basta aplicar los funtores covariantes  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ , con  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , a los diagramas que conmutan junto a los correspondientes isomorfismos.  $\square$

El teorema 3.1.1 nos permite dar los siguientes ejemplos de objetos grupo.

**Ejemplo 3.1.1** (Objetos grupo en **Set**). Si  $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$  entonces un objeto grupo en  $\mathcal{C}$  es un conjunto junto a una operación interna  $m$  que es asociativa, un neutro que es asignado por  $e$ , e inversos asignados por  $i$ . Por tanto, los objetos grupo en  $\mathcal{C}$  son los grupos ordinarios. A su vez, un morfismo en  $\mathbf{Grp}(\mathbf{Set})$  viene a ser un homomorfismo de grupos por la caracterización en el teorema 3.1.2. En resumen,  $\mathbf{Grp}(\mathbf{Set}) = \mathbf{Grp}$ .

**Ejemplo 3.1.2** (Objetos grupo en **Grp**). Si  $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}$  entonces un objeto grupo  $G$  en **Grp** es un grupo  $(G, m, i, e)$  de tal forma que sus morfismos de estructura  $m, i$  y  $e$  son homomorfismos. Sean  $x, y \in G$ . Para que  $i$  sea homomorfismo debe suceder que  $i(xy) = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = i(x)i(y)$ , lo que ocurre si y solo si  $G$  es abeliano. De igual modo,  $m$  es homomorfismo si  $m((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = m(x_1x_2, y_1y_2) = x_1x_2y_1y_2 = x_1y_1x_2y_2$ , lo que ocurre si  $G$  es abeliano. Por lo que podemos concluir que  $\mathbf{Grp}(\mathbf{Grp}) = \mathbf{Ab}$ .

**Ejemplo 3.1.3** (Grupos topológicos). Si  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$  entonces un objeto grupo en  $\mathcal{C}$  consta de un espacio topológico  $X$  con estructura de grupo, de tal forma que la multiplicación  $m$  en  $X$  y la función  $i$  que asigna inversos son funciones continuas (La función  $e$  que asigna el neutro es siempre continua). A los objetos grupo de **Top** los llamamos grupos topológicos. Por la caracterización de los morfismos de objetos grupo, un morfismo entre grupos topológicos es un homomorfismo de grupos que también es una función continua.

**Ejemplo 3.1.4** (Grupos de Lie). Si  $\mathcal{C} = \mathbf{Man}$  entonces un objeto grupo en  $\mathcal{C}$  consta de una variedad suave  $M$  con estructura de grupo de tal forma que la multiplicación  $m$  y la inversión  $i$  son suaves. A los objetos grupo de **Man** los llamamos grupos de Lie. Un morfismo entre grupos de Lie es un homomorfismo de grupos que también es una función suave.

**Proposición 3.1.1.** La categoría  $\mathbf{Grp}(\mathcal{C})$  tiene objeto cero y es el objeto terminal  $T$ .

*Demostración.* Nótese que el objeto terminal  $T$  de  $\mathcal{C}$  es un objeto grupo porque dado  $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ , el conjunto  $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$  admite una única estructura de grupo que lo vuelve isomorfo al grupo trivial  $\{0\}$ . Ahora, si  $P \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Grp}(\mathcal{C}))$  entonces el único morfismo  $f : P \rightarrow T$  es morfismo de objetos grupo pues  $\{f_* : K_P(X) \rightarrow K_T(X)\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$  es transformación natural ya que dado un morfismo  $g : X \rightarrow Y$ , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K_P(X) & \xrightarrow{f_*} & K_T(X) \\ g_* \uparrow & & \uparrow g_* \\ K_P(Y) & \xrightarrow{f_*} & K_T(Y) \end{array}$$

Concluimos que  $f$  es el único morfismo de objetos grupo de  $P$  a  $T$ , y por tanto  $T$  es el objeto terminal de  $\mathbf{Grp}(\mathcal{C})$ .

Ahora, para ver que  $T$  es el objeto inicial, observamos que si  $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$  entonces el único morfismo de grupos  $h_X$  de  $K_T(X)$  a  $K_P(X)$  es aquel que manda a la identidad de  $K_T(X)$  a la identidad de  $K_P(X)$ . Luego, la colección  $\Lambda = \{f_P : K_T(X) \rightarrow K_P(X)\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$  forma una transformación natural de  $K_T$  a  $K_P$  y por el corolario 1.4.1 existe entonces un único morfismo  $f : T \rightarrow P$  tal que  $\eta^{(f)} = \Lambda$  y por lo tanto  $f$  es el único morfismo de objetos grupo de  $T$  a  $P$ , mostrando que  $T$  también es objeto inicial en  $\mathbf{Grp}(\mathcal{C})$  y por lo tanto es objeto cero de la categoría.  $\square$

**Proposición 3.1.2.** *Si  $\mathcal{C}$  admite límites entonces  $\mathbf{Grp}(\mathcal{C})$  admite límites.*

*Demostración.* Sea  $F : I \rightarrow \mathcal{C}$  funtor con  $F(i) = G_i$  un grupo objeto. Sea  $(L, \{\pi_i : L \rightarrow G_i\}_{i \in I})$  el límite de  $F$  en  $\mathcal{C}$ . Como  $\mathbf{Grp}$  es categoría completa, existe  $\lim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G_i)$  como grupo y es isomorfo, por la proposición 1.3.6, al grupo  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, L)$ . Por tanto,  $L$  es objeto grupo y es el límite de  $(G_i)_{i \in I}$  en  $\mathbf{Grp}(\mathcal{C})$ .  $\square$

## 3.2. Grupos topológicos

En esta sección abordaremos resultados clásicos de los grupos topológicos. Estos resultados serán de utilidad ya que todo grupo de Lie resulta ser un grupo topológico. El lector interesado en grupos topológicos puede consultar [Str06].

**Proposición 3.2.1.**  *$(G, m, i, e)$  es grupo topológico si y solo si la función  $F : G \times G \rightarrow G$  dada por  $F(x, y) = xy^{-1}$  es continua.*

*Demostración.* Si  $G$  es grupo topológico entonces  $F = m \circ (\pi_1 \times (i \circ \pi_2))$  es continua. Y si  $F$  es continua entonces  $i = F \circ (e \times 1_G)$  es continua y por lo tanto  $m = F \circ (\pi_1 \times (i \circ \pi_2))$  es continua.  $\square$

**Definición 3.2.1** (Espacio homogéneo). *El espacio topológico  $X$  es homogéneo si para cualesquiera  $x, y \in X$  existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  tal que  $f(x) = y$ .*

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $G$  grupo topológico y  $g \in G$ . Las traslaciones  $R_g : G \rightarrow G$  y  $L_g : G \rightarrow G$  dadas por*

$$R_g(x) = xg$$

$$L_g(x) = gx$$

*son homeomorfismos*

*Demostración.* Como podemos escribir  $R_g = m \circ (1_G \times g)$  y  $L_g = m \circ (g \times 1_G)$  entonces el resultado se sigue de que la multiplicación  $m$  del grupo, la identidad de  $G$  y la función constante  $g$  son continuas.  $\square$

**Corolario 3.2.1.** *Todo grupo topológico  $G$  es un espacio homogéneo.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in G$ . Por la proposición 3.2.2 la función  $R_{x^{-1}y}$  es un homeomorfismo que además cumple que  $R_{x^{-1}y}(x) = y$ .  $\square$

**Corolario 3.2.2.** *Sea  $G$  grupo topológico,  $g \in G$  y  $\mathfrak{B}$  una base de vecindades de la identidad  $e$ . Entonces  $\{R_g[B] : B \in \mathfrak{B}\}$  es una base de vecindades de  $g$ .*

*Demostración.* Si  $U$  es vecindad de  $g$  entonces  $R_g^{-1}[U] = R_{g^{-1}}[U]$  es vecindad de  $e$  y existe  $B \in \mathfrak{B}$  tal que  $B \subseteq R_g^{-1}[U]$  y por lo tanto  $R_g[B] \subseteq U$ .  $\square$

**Corolario 3.2.3.** *Sean  $G$  y  $G'$  grupos topológicos. Si un homomorfismo de grupos  $f : G \rightarrow G'$  es continua en un punto  $g \in G$  entonces  $f$  es un morfismo de grupos topológicos.*

*Demostración.* Sea  $h \in G$ . Como  $f$  es continua en  $g$  entonces existe  $U$  vecindad de  $g$  y  $V$  vecindad de  $f(g)$  tales que  $f[U] \subseteq V$ . Como las traslaciones son homeomorfismos se tiene que  $R_{g^{-1}h}[U]$  es vecindad de  $y$  tal que

$$f[R_{g^{-1}h}[U]] = R_{g^{-1}h}[f[U]] \subseteq R_{g^{-1}h}[V] \quad (3.6)$$

donde la primera igualdad en 3.6 se sigue de que  $f$  es homomorfismo de grupos.  $\square$

**Proposición 3.2.3.** *Si  $H$  es subgrupo del grupo topológico  $(G, m, i, e)$  entonces  $H$  es un grupo topológico con la topología de subespacio.*

*Demostración.* Si  $U$  es abierto en  $H$ . Entonces  $m|_H^{-1}[U] = (H \times H) \cap m^{-1}[U]$  es abierto en  $H \times H$  y por tanto  $m|_H$  es continua. De igual modo se demuestra que  $i|_H$  es continua.  $\square$

**Proposición 3.2.4.** *Si  $H$  es subgrupo abierto del grupo topológico  $G$  entonces  $H$  es cerrado.*

*Demostración.* Sea  $y \in G \setminus H$ . Entonces la clase lateral  $yH = \{yh \in G : h \in H\} = L_y[H]$  es un conjunto abierto tal que  $y \in yH \subseteq G \setminus H$  porque  $ye = y \in yH$  y si sucediera que  $yh = h'$  para ciertos  $h, h' \in H$  entonces se tendría  $y \in h'h^{-1} \in H \cap (G \setminus H)$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $G \setminus H$  es abierto y así,  $H$  es cerrado.  $\square$

**Proposición 3.2.5.** *Si  $G$  es grupo topológico entonces la componente conexa de la identidad  $G^0$  es subgrupo normal de  $G$ .*

*Demostración.* Como la función que asigna el inverso  $i$  es continua,  $ee = e$  y  $G^0$  es conexo entonces  $i[G^0]$  es vecindad conexa de  $e$  y por tanto  $i[G^0] \subseteq G^0$ . Por otro lado, ya que el producto de espacios conexos sigue siendo conexo, se tiene de manera similar  $m[G^0 \times G^0] \subseteq G^0 \times G^0$ . De este modo las operaciones de grupo son cerradas en el subconjunto  $G^0$  constituye un subgrupo de  $G$ .

Dado que la conjugación en el grupo  $\eta_g : G \rightarrow G$  dada por  $\eta_g(h) = ghg^{-1}$  con  $g \in G$ , es lo mismo que  $\eta_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$  entonces  $\eta_g$  es un morfismo de grupos topológicos y por continuidad junto al hecho de que  $e \in \eta_g[G^0]$  se tiene que  $\eta_g[G^0] \subseteq G^0$  para toda  $g \in G$ . Por tanto,  $G^0$  es subgrupo normal de  $G$ .  $\square$

**Proposición 3.2.6.** *Si los morfismos de grupos topológicos  $f_1, f_2 : G \rightarrow H$  coinciden en un abierto  $U$  no vacío y  $G$  es conexo entonces  $f_1 = f_2$*

*Demostración.* Si  $u \in U$  entonces

$$e = f_1(uu^{-1}) = f_1(u)f_1(u^{-1}) = f_2(u)f_2(u^{-1}) = f_2(uu^{-1}) = e$$

y cancelando se tiene  $f_1(u^{-1}) = f_2(u^{-1})$  y así  $f_1$  y  $f_2$  también coinciden en  $i[U]$  con  $i$  la función inversión del grupo. Y es más, los morfismos coinciden en la vecindad  $U_0 = U \cdot i[U]$  de la identidad del grupo  $e$  pues si  $u \in U$  y  $v \in i[U]$  entonces

$$f_1(uv) = f_1(u)f_1(v) = f_2(u)f_2(v) = f_2(uv)$$

Ahora mostraremos que el subgrupo no vacío  $A = \{g \in G : f_1(g) = f_2(g)\}$  es abierto: Dado  $g \in A$  se tiene que  $gU_0$  es vecindad de  $g$  contenida en  $A$ . Por la proposición 3.2.4,  $A$  es también cerrado. Por conexidad debe suceder que  $A = G$ .  $\square$

**Proposición 3.2.7.** *Sea  $G$  grupo topológico conexo y  $U$  vecindad de la identidad  $e$  de  $G$ . Entonces*

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$$

*Demostración.* Definamos la vecindad  $V := U \cap U^{-1}$  de  $e$  y al subconjunto  $H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n \subseteq G$ . Notemos que  $V = V^{-1}$ .

$H$  es subgrupo de  $G$  pues si  $g, h \in H$  con  $g = g_1 \dots g_n \in V^n$  y  $h = h_1 \dots h_m \in V^m$  entonces  $gh^{-1} = g_1 \dots g_n h_m^{-1} \dots h_1^{-1} \in V^{n+m} \subseteq H$ .

$H$  es abierto porque si  $g \in H$  entonces se tiene que pertenece a la vecindad  $g \in gV \subseteq gH$ . Se sigue por la proposición 3.2.4 que  $H$  es cerrado.

Como  $H \subseteq G$  es no vacío ( $e \in H$ ) y es tanto abierto como cerrado con  $G$  conexo entonces  $H = G$ . Dado que  $H \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n \subseteq G$  entonces concluimos la igualdad deseada.  $\square$

### 3.3. Grupos de Lie

#### 3.3.1. Primeros ejemplos

**Definición 3.3.1** (Subgrupo de Lie). *Sea  $G$  grupo de Lie. Una subvariedad  $(H, \phi)$  de  $G$  es un subgrupo de Lie de  $G$  si  $H$  es grupo de Lie y  $\phi$  es un morfismo de grupos de Lie.*

**Observación 3.3.1.** *Si  $(H, i)$  es subvariedad del grupo de Lie  $G$  con  $H \subseteq G$  subgrupo entonces, dado que la inclusión es morfismo de grupos de Lie, la subvariedad  $H$  es subgrupo de Lie de  $G$ .*

**Proposición 3.3.1.** *Un grupo  $G$  es grupo de Lie si y solo si la función  $F : G \times G \rightarrow G$  dada por  $F(x, y) = xy^{-1}$  es suave.*

*Demostración.* La demostración es similar a la proposición 3.2.1.  $\square$

**Definición 3.3.2** (Acción suave). Sea  $G$  grupo de Lie,  $X$  variedad suave y  $\alpha : G \rightarrow \text{Diff}(X)$  un homomorfismo de grupos.  $\alpha$  es acción suave si la función  $\phi_\alpha : G \times X \rightarrow X$  dada por

$$\phi_\alpha(g, x) := \alpha(g)x := (\alpha(g))(x)$$

es suave.

**Proposición 3.3.2.** Sea  $G$  grupo de Lie y  $g \in G$ . Las traslaciones  $R_g$  y  $L_g$  son difeomorfismos. Además, la función  $R : G \rightarrow \text{Diff}(G)$ , dada por  $R(g) = R_g$ , y la función  $L : G \rightarrow \text{Diff}(G)$ , dada por  $L(g) = L_g$ , son acciones suaves de  $G$  en  $G$ .

*Demostración.* La demostración de la primera parte es parecida a la de la proposición 3.2.2. Lo segundo es cierto ya que si  $g, h, k \in G$  entonces  $L_{gh}(k) = (gh)k = g(hk) = L_g \circ L_h(k)$  y similarmente con  $R$ .  $\square$

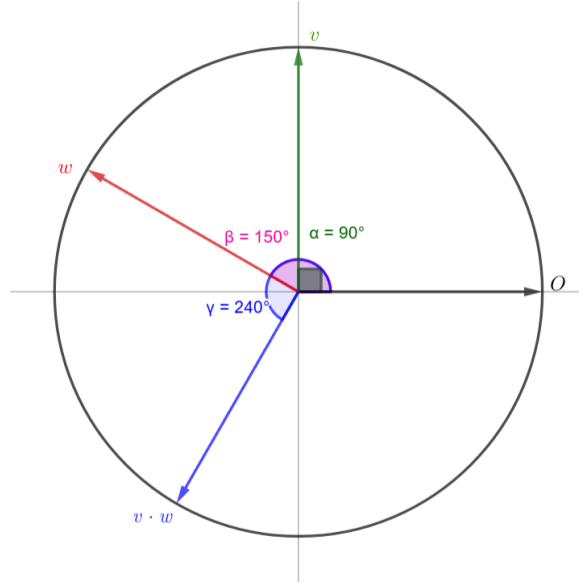
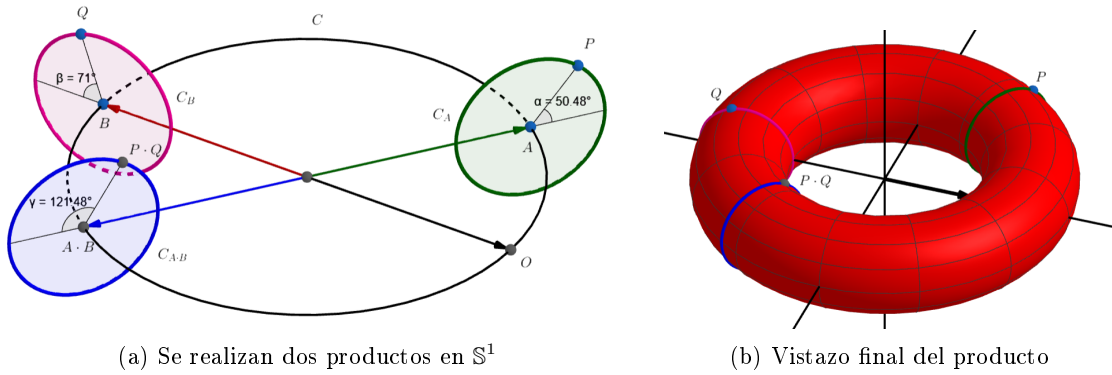
**Ejemplo 3.3.1** (La circunferencia unitaria y el toro como grupos de Lie). Recordando que el círculo unitario  $\mathbb{S}^1$  es subgrupo de  $\mathbb{C}$ , notando que la función  $F(x, y) = xy^{-1}$  es suave en  $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$  y retomando el ejemplo 2.1.4 tenemos por la proposición 3.3.1 que  $\mathbb{S}^1$  es un grupo de Lie. Además, como **Man** tiene productos finitos por la proposición 2.1.3 entonces **Grp(Man)** también tiene productos finitos por la proposición 3.1.2, y el producto coincide con el producto en **Man** con la estructura de producto directo de grupos. Es decir, el toro  $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  con el producto coordenada a coordenada es también un grupo de Lie. Podemos interpretar geométricamente a la multiplicación en  $\mathbb{S}^1$ : Multiplicar dos puntos  $v$  y  $w$  en la circunferencia unitaria con argumentos  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, resulta en un tercer punto  $v \cdot w$  con argumento  $\alpha + \beta$  (Véase la figura 3.1). Por tanto, podemos pensar al toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  como una circunferencia 'esqueleto'  $C$  que en cada punto  $x$  posee una circunferencia 'auxiliar'  $C_x$ . De este modo, multiplicar dos puntos en  $T^2$  nos da un tercer punto que se obtiene de movernos, tanto en  $C$  como en las circunferencias auxiliares, como se haría en  $\mathbb{S}^1$  (Véanse las figuras 3.2a y 3.2b).

**Ejemplo 3.3.2** (Grupo general lineal). Si  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  denota al conjunto de matrices de  $n \times n$  con entradas en los reales entonces el grupo general lineal es el conjunto

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

que junto a la multiplicación de matrices lo dota de estructura de grupo. El grupo general lineal es una variedad diferenciable determinada por la carta global  $x : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  dada por

$$x(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{n(n-1)}, a_{nn})$$

Figura 3.1: Multiplicación en  $\mathbb{S}^1$ .Figura 3.2: Producto en  $\mathbb{T}^2$ 

donde  $a_{ij}$  es la entrada  $(i, j)$  de  $A$  (Es decir, la entrada en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna de la matriz  $A$ ). Las operaciones de grupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  son suaves pues dados  $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ , la entrada  $(i, j)$  de  $AB$  es

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (3.7)$$

y 3.7 como función de  $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$  a  $\mathbb{R}$  es suave pues es un polinomio. Mientras que la entrada  $(i, j)$  de  $A^{-1}$  es  $\frac{1}{\det(A)} A_{ij}$  con  $A_{ij}$  el cofactor de  $A$  que se calcula como el determinante de la matriz de  $(n-1) \times (n-1)$  que se obtiene de eliminar el renglón  $i$ -ésimo y la columna  $j$ -ésima de  $A$ . Ya que

el determinante tiene una forma polinomial<sup>1</sup>

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \quad (3.8)$$

,y no se anula en  $GL(n, \mathbb{R})$ , entonces la restricción  $i|_{GL(n, \mathbb{R})}$  es suave. Concluimos que  $GL(n, \mathbb{R})$  es un grupo de Lie.

Si  $V$  es  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  entonces podemos identificar al grupo  $GL(V)$  de automorfismos lineales de  $V$  con  $GL(n, \mathbb{R})$  y hereda la estructura de grupo de Lie.

En caso de que  $V$  sea  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial podemos hacer la identificación de  $GL(V)$  con  $GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}$  que a su vez se identifica con  $\mathbb{R}^{2n^2}$  ya que  $\mathbb{C}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 2 y por el ejemplo 2.1.5 es que puede considerarse una variedad donde identificamos mediante una carta global al complejo  $x + iy$  con el elemento  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

A los subgrupos de Lie ya sea de  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$  o  $GL(V)$  se les conoce como los grupos de Lie lineales.

### 3.3.2. Representaciones lineales y tensores

La siguiente subsección está basada en [Gor+13].

**Observación 3.3.2.** Recordemos que si  $\alpha : G \rightarrow S_X$  es una acción del grupo  $G$  en el conjunto  $X$  y  $x \in X$  entonces el estabilizador de  $\alpha$  es el subgrupo de  $G$  dado por

$$G_x := \{g \in G : \alpha(g)x = x\}$$

También recordemos que si  $x \in X$  entonces se induce una función  $\alpha_x : G \rightarrow X$  dada por  $\alpha_x(g) = \alpha(g)x$ . En el caso de que  $\alpha$  sea acción suave se tiene que la función  $\alpha_x$  es suave.

**Teorema 3.3.1.** Sea  $\alpha$  una acción suave del grupo de Lie  $G$  en la variedad suave  $X$ . Si  $x \in X$  entonces la función  $\alpha_x : G \rightarrow X$ , dada por  $\alpha_x(g) = (\alpha(g))(x)$ , tiene rango constante  $k$ . Además, el estabilizador de la acción  $G_x$  es un subgrupo de Lie de codimensión  $k$  en  $G$  y se tiene la igualdad

$$T_e(G_x) = \text{Ker}(T_e\alpha_x)$$

*Demostración.* Se sigue del siguiente diagrama conmutativo para cualquier  $g \in G$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_x} & X \\ L_g \downarrow & & \downarrow \alpha(g) \\ G & \xrightarrow{\alpha_x} & X \end{array}$$

---

<sup>1</sup>Con  $S_n$  nos referimos a las biyecciones de  $\{i\}_{i=1}^n$  en  $\{i\}_{i=1}^n$

que la función  $\alpha_x$  tiene rango constante, digamos que tiene rango  $k$ . Por el teorema 2.4.4 se tiene que  $\alpha_x^{-1}[\{x\}] = \{g \in G : \alpha_x(g) = \alpha(g)x = x\} = G_x \subseteq G$  es subvariedad y por tanto es subgrupo de Lie con el espacio tangente del enunciado.  $\square$

El teorema 3.3.1 nos permite demostrar con facilidad que un subgrupo  $H$  de  $G$  es subgrupo de Lie: Basta hallar una acción suave en  $G$  cuyo estabilizador sea  $H$ .

**Definición 3.3.3** (Representación lineal). *Una representación lineal del grupo de Lie  $G$  en el espacio vectorial  $V$  es un morfismo de grupos de Lie*

$$\phi : G \rightarrow GL(V)$$

**Observación 3.3.3.** *Dada una representación lineal  $\phi : G \rightarrow GL(V)$ , podemos considerar la acción suave  $\rho_\phi : G \times V \rightarrow V$  dada por*

$$\rho_\phi(g, v) = \phi(g)v$$

**Ejemplo 3.3.3.** *La identidad del grupo de Lie  $GL(V)$  nos da una representación lineal de  $GL(V)$  en  $V$  como sigue:  $Id : GL(V) \rightarrow GL(V)$ , con  $Id(A) = A$ .*

**Ejemplo 3.3.4** (Operaciones entre representaciones lineales). *Sean  $R : G \rightarrow GL(V)$  y  $S : G \rightarrow GL(U)$  representaciones lineales del grupo de Lie  $G$ . Podemos construir nuevas representaciones lineales de  $G$  a partir de estas dos.*

*La suma de las representaciones  $R$  y  $S$  es una representación lineal  $R + S : G \rightarrow GL(V \oplus U)$  de  $G$  en  $V \oplus U$  dada por*

$$(R + S)(g)(v + u) = R(g)v + S(g)u$$

*El producto de las representaciones  $R$  y  $S$  es una representación lineal  $RS$  de  $G$  en  $V \otimes U$  dada por*

$$(RS)(g)(v \otimes u) = R(g)v \otimes S(g)u$$

*La representación dual de la representación  $R$  es una representación lineal  $R^*$  de  $G$  en  $V^*$  dada por*

$$(R^*(g)f)(v) = f(R(g)^{-1}v)$$

**Ejemplo 3.3.5.** *Sea  $V$  espacio vectorial de dimensión finita. Dados  $n, k \in \mathbb{N}_0$ , la identidad  $Id$  de  $GL(V)$  induce una representación lineal  $T_{k,l} : GL(V) \rightarrow GL(T^{k,l}(V))$  de  $GL(V)$  en el espacio  $T^{k,l}(V) := T^k V \otimes T^l V^*$  de tensores de tipo  $(k, l)$ , la cual está dada por*

$$T_{k,l} = Id^k (Id^*)^l$$

Antes de continuar con los ejemplos, recordaremos algunas propiedades del producto tensorial.

El lector interesado en los detalles de las definiciones y pruebas puede consultar el capítulo 10 de [Zal19].

**Observación 3.3.4.** Sean  $\{V, W\} \cup \{V_i\}_{i=1}^k$   $K$ -espacios vectoriales. Por  $\text{Hom}_K(V, W)$  nos referiremos al conjunto de transformaciones  $K$ -lineales de  $V$  en  $W$ .

Mientras que con

$$\text{Mult}_K(\prod_{i=1}^k V_i, V)$$

nos referiremos al conjunto de transformaciones  $k$ -multilineales de  $\prod_{i=1}^k V_i$  a  $V$ .

A funciones  $k$ -multilineales de  $V^k$  en  $K$  se les conoce como formas  $k$ -lineales en  $V$ .

**Definición 3.3.4** (Tensor de tipo  $(r, s)$ ). Sea  $V$   $K$ -espacio vectorial de dimensión finita. Un elemento de  $T^{r,s} := (\otimes_{i=1}^r V) \otimes (\otimes_{j=1}^s V_j^*)$  se conoce como un tensor de tipo  $(r, s)$ .

**Teorema 3.3.2.** Sean  $\{W\} \cup \{V_i\}_{i=1}^k$   $K$ -espacios vectoriales. Entonces se tiene el siguiente isomorfismo lineal

$$\text{Mult}_K(\prod_{i=1}^k V_i, W) \cong \text{Hom}_K(\bigotimes_{i=1}^k V_i, W)$$

*Demostración.* Tomando  $j \in \{1, \dots, k\}$ , elegimos  $\{e_i^{(j)}\}_{i=1}^{d_j}$  base de  $V_j$  con  $V_j$   $K$ -espacio vectorial de dimensión  $d_j$ . Sabemos que  $\{\bigotimes_{n=1}^k e_{i_n}^{(n)}\}_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, d_1\} \times \dots \times \{1, \dots, d_k\}}$  es base de  $\bigotimes_{j=1}^k V_j$ . A  $g \in \text{Mult}_K(\prod_{i=1}^k V_i, W)$  le asociamos la transformación lineal  $\tilde{g} : \bigotimes_{j=1}^k V_j \rightarrow W$  dada en la base por

$$g(\bigotimes_{n=1}^k e_{i_n}^{(n)}) = g(e_{i_1}^{(1)}, \dots, e_{i_k}^{(k)})$$

Cabe destacar que  $\tilde{g}$  es la única transformación lineal que hace conmutar el siguiente diagrama (Propiedad universal del producto tensorial)

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^k V_i & \xrightarrow{g} & W \\ \otimes \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \\ \bigotimes_{i=1}^k V_i & & \end{array}$$

□

**Teorema 3.3.3.** Sean  $\{V_i\}_{i=1}^k$   $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces se tiene el siguiente isomorfismo lineal

$$\bigotimes_{i=1}^k V_i^* \cong (\bigotimes_{i=1}^k V_i)^*$$

*Demostración.* A  $\bigotimes_{i=1}^k f_i \in \bigotimes_{i=1}^k V_i^*$  asociamos la funcional lineal  $f : \bigotimes_{i=1}^k V_i \rightarrow K$  dada por

$$f\left(\bigotimes_{i=1}^k v_i\right) = \prod_{i=1}^k f_i(v_i)$$

□

**Corolario 3.3.1.** Sean  $\{V_i\}_{i=1}^k$   $K$ -espacios vectoriales. Entonces se tiene el siguiente isomorfismo lineal

$$\text{Mult}_K\left(\prod_{i=1}^k V_i, K\right) \cong \left(\bigotimes_{i=1}^k V_i\right)^* \cong \bigotimes_{i=1}^k V_i^*$$

*Demostración.* A  $\bigotimes_{i=1}^k f_i \in \bigotimes_{i=1}^k V_i^*$  asociamos la función  $k$ -multilineal  $f : \prod_{i=1}^k V_i \rightarrow K$  dada por

$$f(v_1, \dots, v_k) = \prod_{i=1}^k f_i(v_i)$$

□

**Ejemplo 3.3.6** (Formas  $l$ -lineales). Por el corolario 3.3.1, todo tensor de tipo  $(0, l)$  puede verse como una  $l$ -forma  $f$  en  $V$ .  $GL(V)$  actúa en  $T^{0,l}$  mediante la función  $\phi_{T^{0,l}} : GL(V) \times T^{0,l} \rightarrow T^{0,l}$  dada por

$$(\phi_{T^{0,l}}(A, f))(v_1, \dots, v_l) = f(A^{-1}v_1, \dots, A^{-1}v_l)$$

En este caso el estabilizador de la acción es

$$GL(V)_f = \{A \in GL(V) : \forall v_1, \dots, v_l \in V (f(v_1, \dots, v_l) = f(A^{-1}v_1, \dots, A^{-1}v_l))\}$$

es decir, es el conjunto de transformaciones lineales que preservan la  $l$ -forma  $f$

$$\text{Aut}(V, f) := GL(V)_f = \{A \in GL(V) : \forall v_1, \dots, v_l \in V (f(v_1, \dots, v_l) = f(Av_1, \dots, Av_l))\} \quad (3.9)$$

Por el teorema 3.3.1, el subconjunto 3.9 conforma un grupo de Lie lineal.

### 3.3.3. Grupos de Lie lineales

En esta sección, veremos manifestaciones concretas del grupo de Lie lineal 3.9 para así recuperar a los grupos clásicos de Lie. Antes de entrar en detalles, presentamos al grupo especial lineal y recordamos conceptos sobre tensores de tipo  $(0, 2)$  (Formas bilineales).

**Ejemplo 3.3.7** (Grupo especial lineal). *El conjunto*

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

es un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  conocido como el grupo especial lineal. Como la función  $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es una sumersión en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  entonces 1 es valor regular de  $\det$  y así, por el teorema 2.4.3,  $\det^{-1}[\{1\}] = SL(n, \mathbb{R})$  es grupo de Lie lineal.

Si  $V$  es  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n$  entonces identificamos a  $SL(V)$  con  $SL(n, \mathbb{R})$ .

De forma similar, podemos definir al subgrupo de Lie  $SL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$  de  $GL(n, \mathbb{C})$ .

**Observación 3.3.5** (Teorema de Cartan). *De forma alterna, para demostrar que  $SL(n, \mathbb{R})$  es grupo de Lie puede utilizarse el teorema de Cartan que dice que: Dado  $G$  grupo de Lie y  $H$  subgrupo de  $G$ ,  $H$  es subgrupo de Lie si y solo si  $H$  es cerrado. Y claramente el conjunto  $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}[\{1\}]$  es cerrado. Se puede leer la demostración del teorema de Cartan como el teorema 5.81 en [Lee09].*

**Definición 3.3.5** (Forma bilineal no degenerada). *Sea  $V$   $K$ -espacio vectorial. Una forma bilineal  $\beta : V \times V \rightarrow K$  es no degenerada si las funciones  $\beta_L, \beta_R : V \rightarrow V^*$ , dadas por  $\beta_L(v) = \beta(v, \cdot)$  y  $\beta_R(v) = \beta(\cdot, v)$ , son isomorfismos.*

**Observación 3.3.6.** *En general, si  $G$  es grupo de Lie lineal entonces 1 es valor regular de  $\det|_G : G \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\det|_G^{-1}[\{1\}]$  es también grupo de Lie lineal.*

*En caso de que  $f$  sea forma  $l$ -lineal, escribiremos  $S\text{Aut}(V, f)$  en lugar de  $\det^{-1}[\{1\}]$*

**Definición 3.3.6** (Producto escalar). *Sea  $V$   $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Un producto escalar real en  $V$  es una forma bilineal  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que es simétrica y no degenerada.*

**Definición 3.3.7** (Forma sesquilineal). *Sea  $V$   $\mathbb{C}$ -espacio vectorial. Una forma sesquilineal en  $V$  es una función  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  que es  $\mathbb{R}$ -bilineal y además satisface lo siguiente*

$$\forall a \in \mathbb{C} \forall v, w \in V ((\beta(av, w) = a\beta(v, w)) \wedge (\beta(v, aw) = \bar{a}\beta(v, w)))$$

**Definición 3.3.8** (Forma hermitiana). *Sea  $\beta$  una forma sesquilineal en el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $V$ .  $\beta$  es una forma hermitiana si*

$$\forall v, w \in V (\beta(v, w) = \overline{\beta(w, v)})$$

*Si además  $\beta$  es no degenerada entonces decimos que  $\beta$  es un producto escalar hermitiano.*

**Definición 3.3.9** (Producto interno). *Sea  $\beta$  un producto escalar (real o hermitiano).  $\beta$  es un producto interno si es positivo definido, lo que significa que*

$$\forall v \in V (\beta(v, v) \geq 0 \wedge (\beta(v, v) = 0 \rightarrow v = 0))$$

**Observación 3.3.7.** Si  $\beta$  es una forma bilineal sobre el  $K$ -espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  con base  $\{v_i\}_{i=1}^n$  entonces tenemos una matriz asociada a  $\beta$  dada por  $B = (\beta(v_i, v_j))_{i,j}$ . Si  $v, w \in V$  y  $[v]$  representa al vector de coordenadas en  $F^n$  de  $v$  con respecto a la base  $\{v_i\}_{i=1}^n$  entonces si conocemos la matriz  $B$  podemos calcular  $\beta$  en  $(v, w)$  de la siguiente manera

$$\beta(v, w) = [v]^t B [w]$$

Por tanto, si  $A$  es una matriz en  $GL(n, K)$  entonces

$$\beta(Av, Aw) = [v]^t A^t B A [w]$$

y así,  $A$  respeta la forma bilineal  $\beta$  si y sólo si  $B = A^t B A$ .

**Ejemplo 3.3.8** (Grupo semiortogonal, ortogonal y ortogonal especial). Sea  $V$   $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Si  $\beta$  es un producto interno en  $V$  entonces  $\text{Aut}(V, \beta)$  se denota por  $O(V, \beta)$  y nos referiremos al mismo como el grupo semiortogonal asociado a  $\beta$ .

Por el teorema de Sylvester junto a Gram-Schmidt (Puede consultar los teoremas 9.14 y 9.21 de [Zal19]) existe una base  $B$  de  $V$  donde la matriz asociada a  $\beta$  es la matriz diagonal  $\eta_{p,q}$  que consta de  $p$  unos en la diagonal y  $q := n - p$  menos unos en la diagonal. Con dicha base  $B$  e identificando a  $V$  con  $\mathbb{R}^n$ ,  $\beta$  está dada por

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^n x_i y_i$$

De este modo,  $O(V, \beta)$  puede denotarse  $O(p, q)$  y va a constar de las matrices  $Q$  en  $GL(n, \mathbb{R})$  tales que  $Q^t \eta_{p,q} Q = \eta_{p,q}$ . O dicho de otro modo, podemos identificar a  $O(V, \beta)$  con el llamado grupo de matrices semiortogonales

$$O(p, q) := \{Q \in GL(n, \mathbb{R}) : \forall x, y \in \mathbb{R}^n (\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle)\}$$

En caso de que  $\beta$  sea un producto interno se tiene  $q = 0$  y llamamos a  $O(V, \beta)$  el grupo ortogonal real. Denotaremos a  $O(n, 0)$  por  $O(n, \mathbb{R})$  y lo llamamos el grupo de matrices ortogonales reales. Además, a  $S\text{Aut}(V, \beta)$  lo denotamos por  $SO(V, \beta)$  y lo llamaremos el grupo especial ortogonal. El grupo especial ortogonal de matrices es  $SO(n, \mathbb{R}) := O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$ .

**Ejemplo 3.3.9** (Grupo semiunitario, unitario y unitario especial). Sea  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y  $\beta$  una forma hermitiana en  $V$ . En este caso denotamos a  $\text{Aut}(V, \beta)$  por  $U(V, \beta)$  y nos referiremos al mismo como el grupo semiunitario asociado a  $\beta$ . Bajo el mismo argumento del ejemplo 3.3.8, existe

una base donde  $\beta$  se puede identificar con la forma hermitiana

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^p x_i \overline{y_i} - \sum_{i=p+1}^n x_i \overline{y_i}$$

Definimos el grupo de matrices semiunitarias

$$U(p, q) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \forall x, y \in \mathbb{C}^n (\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle)\}$$

En el caso de que  $\beta$  sea un producto interno se tiene  $q = 0$  y denotaremos a  $U(p, 0)$  por  $U(n)$ . Llamaremos a  $U(n)$  el grupo de matrices unitarias. Nótese que en particular  $U(1) = \mathbb{S}^1$ .

Si  $\beta$  es producto interno entonces nos referiremos a  $SAut(V, \beta)$  por  $SU(V, \beta)$  y lo llamaremos el grupo especial unitario. El grupo especial unitario en matrices es  $SU(n) := U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$ .

**Ejemplo 3.3.10** (Grupo simpléctico). Sea  $\beta$  es una forma  $\mathbb{C}$ -lineal no degenerada anti-simétrica en  $V$   $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión  $2n$ . A  $Aut(V, \beta)$  lo llamamos el grupo simpléctico complejo. Es posible demostrar que existe una base donde  $\beta$  se ve de la forma canónica

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n v_i w_{n+i} - \sum_{j=1}^n v_{n+j} w_j$$

De modo que el grupo simpléctico de matrices es

$$Sp(2n, \mathbb{C}) := \{A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{C}) : \forall x, y \in \mathbb{C}^{2n} ((Ax, Ay) = (x, y))\}$$

Si  $\beta$  fuera  $\mathbb{R}$ -bilineal antisimétrica y no degenerada en  $V$   $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $2n$  entonces de manera similar definimos los grupos de Lie  $Sp(V, \mathbb{R})$  y  $Sp(2n, \mathbb{R})$ .

Hasta aquí hemos terminado con los grupos de Lie clásicos.

**Definición 3.3.10** ( $K$ -álgebra). Un  $K$ -espacio vectorial  $A$  junto a una función bilineal  $\cdot : A \times A \rightarrow A$ , conocida como el producto en  $A$ , es una  $K$ -álgebra.

**Observación 3.3.8.** Si  $A$  es  $K$ -álgebra con producto  $\cdot$  entonces denotaremos por  $a \cdot b$  a  $\cdot(a, b)$ .

**Definición 3.3.11** (Morfismo de  $K$ -álgebras). Sean  $A$  y  $B$   $K$ -álgebras con productos  $\cdot_A$  y  $\cdot_B$  respectivamente. Una transformación lineal  $T : A \rightarrow B$  es un morfismo de  $K$ -álgebras si

$$\forall a, b \in A (T(a \cdot_A b) = T(A) \cdot_B T(B))$$

En caso de que  $A = B$  y  $T$  sea isomorfismo lineal, diremos que  $T$  es un automorfismo del  $K$ -álgebra  $A$ .

**Ejemplo 3.3.11** (Automorfismo de una  $K$ -álgebra). *Por los isomorfismos para funciones multilineales y tensores obtenemos*

$$\text{Bil}(A \times A, A) \cong \text{Hom}_K(A \otimes A, A) \cong (A \otimes A)^* \otimes A \cong T^{1,2}A$$

*De este modo, el producto en una  $K$ -álgebra es un tensor de tipo  $(1, 2)$ .*

*Las transformaciones lineales invertibles que preservan el tensor forman un grupo de Lie. Por tanto, el conjunto de automorfismos  $\text{Aut}(A)$  del  $K$ -álgebra finita  $A$  constituyen un grupo de Lie.*

## 3.4. Álgebras de Lie

### 3.4.1. Álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie

Comenzamos hablando de la definición general de álgebra de Lie para luego particularizar al caso del álgebra de Lie asociado a un grupo de Lie, el cual puede ser identificado por medio de sus campos vectoriales izquierdo invariantes.

**Definición 3.4.1** (Álgebra de Lie). *Un álgebra de Lie [real] consta de un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $V$  junto a una función bilineal  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  antisimétrica (A veces conocido como el corchete de Lie) tal que*

$$\forall x, y, z \in V ([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0) \quad (3.10)$$

*A 3.10 se le llama la identidad de Jacobi.*

**Definición 3.4.2** (Morfismo de álgebras de Lie). *Si  $V$  y  $W$  son dos álgebras de Lie entonces una transformación lineal  $f : V \rightarrow W$  es un morfismo de álgebras de Lie si*

$$\forall x, y \in V (f([x, y]) = [f(x), f(y)])$$

*Y si además  $f$  es un isomorfismo lineal entonces se dice que  $f$  es un isomorfismo de álgebras de Lie.*

**Definición 3.4.3.** *Sea  $(V, [\cdot, \cdot]_V)$  es álgebra de Lie y  $W$  subespacio vectorial de  $V$ .  $W$  es subálgebra de Lie de  $V$  si  $(W, [\cdot, \cdot]_V|_{W \times W})$  es álgebra de Lie.*

**Ejemplo 3.4.1.** *Toda álgebra de Lie es una  $\mathbb{R}$ -álgebra con producto  $[\cdot, \cdot]$ . Por el ejemplo 3.3.11, el conjunto de automorfismos  $\text{Aut}(V)$  del álgebra de Lie de dimensión finita  $V$  forman un grupo de Lie.*

**Observación 3.4.1** (Categoría de álgebras de Lie). *La composición de morfismos de álgebras de Lie vuelve a ser morfismo de álgebras de Lie, y la función identidad del álgebra de Lie también es morfismo. Esto nos permite hablar de la categoría **LieAlg** cuyos objetos son álgebras de Lie y cuyos*

objetos son morfismos de álgebras de Lie. Además, a la subcategoría de **LieAlg** que consta de las álgebras de Lie de dimensión finita la denotamos por **LieAlg<sup>f</sup>**

**Proposición 3.4.1.** *Si  $M$  es variedad entonces  $\mathfrak{X}(M)$  junto al conmutador de campos vectoriales tiene estructura de álgebra de Lie real.*

*Demostración.* Se dota a  $\mathfrak{X}(M)$  de estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial definiendo la suma y el producto escalar como usualmente se hace para funciones real valuadas. Esto es, si  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces

$$(X + Y)(f) := X(f) + Y(f)$$

$$(\lambda X)(f) := \lambda X(f)$$

Además si tomamos  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^L(M)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

1. Es antisimétrico (O anticonmutativo) ya que

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) = -(Y(Xf) - X(Yf)) = -[Y, X]$$

2. Es bilineal. Basta demostrarlo en una entrada por la antisimetría.

$$\begin{aligned} [\lambda X + Y, Z](f) &= (\lambda X + Y)(Zf) - Z((\lambda X + Y)f) \\ &= \lambda X(Zf) + Y(Zf) - Z(\lambda(Xf)) - Z(Yf) \\ &= \lambda[X, Z] + [Y, Z] \end{aligned}$$

3. Satisface la identidad de Jacobi pues

$$[X, [Y, Z]](f) = X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf))$$

$$[Y, [Z, X]](f) = Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf))$$

$$[Z, [X, Y]](f) = Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf))$$

Y haciendo la suma se obtiene que  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

□

**Definición 3.4.4.** Sea  $G$  grupo de Lie. Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(G)$  es izquierdo invariante si

$$\forall g \in G (X \sim_{L_g} X)$$

En otras palabras,  $X$  es izquierdo invariante si para toda  $g \in G$  el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{TL_g} & TG \\ X \uparrow & & \uparrow X \\ G & \xrightarrow{L_g} & G \end{array}$$

Al conjunto de campos izquierdo invariantes de  $G$  se le denota por  $\mathfrak{X}^L(G)$ .

**Lema 3.4.1.** Sea  $G$  grupo de Lie. Un campo  $X \in \mathfrak{X}(G)$  es izquierdo invariante si y solo si

$$\forall g \in G \forall f \in C^\infty(G) (X(f \circ L_g) = (Xf) \circ L_g)$$

*Demostración.* Sean  $g, h \in G$  y  $f \in C^\infty(M)$ . Por un lado

$$(X(f \circ L_g))(h) = X_h(f \circ L_g) = (T_h L_g(X_h))(f) \quad (3.11)$$

Mientras que por otro lado

$$(Xf \circ L_g)(h) = X_{gh}(f) \quad (3.12)$$

Y los términos 3.11 y 3.12 son iguales si y sólo si  $X_{gh} = T_h L_g(X_h)$ .  $\square$

**Proposición 3.4.2.** Sea  $G$  grupo de Lie. Si  $X, Y \in \mathfrak{X}^L(G)$  entonces  $[X, Y] \in \mathfrak{X}^L(G)$ .

*Demostración.* Sea  $f \in C^\infty(G)$  y  $g \in G$ . Por definición 2.3.6:

$$[X, Y](f \circ L_g) = X(Y(f \circ L_g)) - Y(X(f \circ L_g)) \quad (3.13)$$

$$= X((Yf) \circ L_g) - Y((Xf) \circ L_g) \quad (3.14)$$

$$= (X(Yf)) \circ L_g - (Y(Xf)) \circ L_g \quad (3.15)$$

$$= ([X, Y]f) \circ L_g \quad (3.16)$$

donde las igualdades 3.14 y 3.15 se deben al lema 3.4.1. Por la igualdad 3.16 y el lema 3.4.1 se concluye que  $[X, Y] \in \mathfrak{X}^L(G)$   $\square$

**Corolario 3.4.1.** Sea  $G$  grupo de Lie. El conjunto de campos izquierdos invariantes  $\mathfrak{X}^L(G)$  es subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(G)$ .

*Demostración.* La proposición 3.4.2 nos dice que el conmutador  $[\cdot, \cdot]$  es cerrado en el subespacio lineal  $\mathfrak{X}^L(M)$  de  $\mathfrak{X}(M)$ . Concluimos que  $\mathfrak{X}^L(M)$  es álgebra de Lie.  $\square$

**Proposición 3.4.3.** *Sea  $G$  grupo de Lie. Existe un isomorfismo de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales*

$$T_e G \cong \mathfrak{X}^L(G)$$

*Demostración.* Definimos la función  $F : T_e G \rightarrow \mathfrak{X}^L(G)$  dada por  $F(v) = L^v$  donde  $L^v(g) := (T_e L_g)(v)$ . Primero veamos que  $F$  está bien definida: Si  $v \in T_e G$ ,  $g, h \in G$  y  $f \in C^\infty(G)$  entonces

$$(T_h L_g(L_h^v))(f) = L_h^v(f \circ L_g) = (T_e L_h(v))(f \circ L_g) = v(f \circ L_g \circ L_h) = (T_e L_{gh}(v))(f) = L_{gh}^v(f)$$

y por la definición 3.4.4,  $L^v$  es izquierdo invariante y la función  $F$  esta bien definida.

Para ver que  $F$  es isomorfismo lineal definimos a la función  $G : \mathfrak{X}^L(G) \rightarrow T_e G$  dada por  $G(X) = X_e$ .  $G$  es lineal pues si  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces  $G(\lambda X + Y) = \lambda X_e + Y_e = \lambda G(X) + G(Y)$ . Y  $G$  es inversa de  $F$  ya que

$$G(F(v))(f) = G(L^v)(f) = L_e^v(f) = (T_e L_e(v))(f) = v(f \circ L_e) = v(f)$$

Es decir,  $G(F(v)) = v$ . Por lo tanto, concluimos que  $F$  es isomorfismo lineal.  $\square$

**Corolario 3.4.2.** *Si  $G$  es grupo de Lie de dimensión  $n$  visto como variedad diferenciable entonces el álgebra de Lie  $\mathfrak{X}^L(G)$  es de dimensión  $n$  visto como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.*

*Demostración.* Por la proposición 3.4.3 se tiene el isomorfismo lineal  $\mathfrak{X}^L(M) \cong T_e G$  y por lo tanto los espacios tienen la misma dimensión. Y la dimensión de  $T_e G$ , como vimos en la proposición 2.2.6, es igual a la dimensión de  $G$ .  $\square$

Destaca el hecho de que los campos izquierdo invariantes sean completos.

**Lema 3.4.2.** *Sea el campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\gamma : I \rightarrow M$  curva integral de  $M$  en  $p$ . Entonces para  $a \in \mathbb{R}$ , la curva  $\tilde{\gamma} : I - a \rightarrow M$  dada por  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t + a)$  es curva integral de  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $f \in C^\infty(M)$  y  $t_0 \in I$ . Entonces

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t_0)f = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}(f \circ \tilde{\gamma}) = \frac{d}{dt}|_{t_0}(f \circ \gamma)(t_0 + a) = (f \circ \gamma)'(t_0 + a) = \dot{\gamma}(t_0 + a)f = X_{\gamma(t_0+a)}f = X_{\tilde{\gamma}(t_0)}f$$

Por lo tanto,  $\tilde{\gamma}$  es curva integral de  $M$ .  $\square$

**Lema 3.4.3.** *Sea el campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Si existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $p \in M$  y curva integral maximal  $\gamma_p : I_p \rightarrow M$  de  $M$  que inicia en  $p$  se tiene que  $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq I_p$ , entonces  $X$  es completo.*

*Demostración.* Supongamos que existe  $p \in M$  tal que el dominio de la curva integral maximal  $\gamma_p : I_p \rightarrow M$  por  $p$  tiene dominio acotado.

En el caso de que  $I_p$  este acotado por arriba consideramos  $a := \sup(I_p)$  y  $t_0 > 0$  tal que  $a - \epsilon < t_0 < a$ . Tomando  $q = \gamma_p(t_0)$ , entonces por hipótesis se tiene  $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq I_q$ . Definimos  $\gamma : (-\epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow M$  mediante

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_p(t) & \text{si } t \in (-\epsilon, a) \\ \gamma_q(t - t_0) & \text{si } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \end{cases}$$

$\gamma$  está bien definida por el teorema de unicidad. Por el lema 3.4.2,  $\gamma$  es curva integral que comienza en  $p$  con  $t_0 + \epsilon > a$ , lo cual no es posible porque  $a$  es el supremo de  $I_p$ .

En caso de que  $I_p$  este acotado por debajo, la demostración es similar.  $\square$

**Proposición 3.4.4.** *Sea  $G$  grupo de Lie. Si  $X \in \mathfrak{X}^L(G)$  entonces  $X$  es completo.*

*Demostración.* Sea  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$  curva integral de  $G$  en  $e$  y  $g \in G$ . Como  $X \sim_{L_g} X$  entonces por la proposición 2.3.4 se tiene que  $L_g \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$  es curva integral de  $X$  en  $g$ . Por el lema 3.4.3 se sigue que  $X$  es completo.  $\square$

**Observación 3.4.2** (Álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie). *Por el isomorfismo en 3.4.3, se induce naturalmente una estructura de álgebra de Lie en  $T_e G$  dada por*

$$\forall v, w \in T_e G([v, w] := [L^v, L^w](e))$$

*En resumen, dado un grupo de Lie  $G$ , existe un álgebra de Lie, que podemos identificar como  $T_e G$  ó  $\mathfrak{X}^L(G)$ , asociada a  $G$ . Se acostumbra a denotar al álgebra de Lie asociada al grupo de Lie por una letra minúscula en tipografía Fraktur. Por ejemplo, el álgebra de Lie de  $G$  se denotaría  $\mathfrak{g}$ , mientras que el álgebra de Lie de  $H$  se denotaría  $\mathfrak{h}$ .*

**Observación 3.4.3** (Coeficientes de estructura). *Sea  $(V, [\cdot, \cdot]_V)$  álgebra de Lie  $n$ -dimensional, con base  $\{v_i\}_{i=1}^n$ . Si tomamos  $a, b \in V$  con  $a = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  y  $b = \sum_{i=1}^n b_i v_i$  entonces por la bilinealidad del corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]_V$  se tiene la igualdad*

$$[a, b]_V = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} a_i b_j [v_i, v_j]_V = \sum_{(i,j,k) \in \{1, \dots, n\}^3} a_i b_j c_{ij}^k v_k$$

donde

$$[v_i, v_j]_V = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k v_k$$

*Por tanto el corchete de Lie en  $V$  queda totalmente determinado por la colección de escalares  $\{c_{ij}^k\}_{(i,j,k) \in \{1, \dots, n\}^3}$ . A los escalares  $c_{ij}^k$  se les conoce como coeficientes de estructura del álgebra de Lie  $V$ .*

*Cabe destacar que por la antisimetría del corchete de Lie en la definición 3.4.1 se van a tener las siguientes igualdades*

$$\begin{aligned} c_{ij}^k &= -c_{ji}^k \\ c_{ii}^k &= 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.4.2** (Álgebra de Lie abeliana). *Si  $V$  es espacio vectorial de dimensión uno con base  $\{w\}$  entonces por la observación 3.4.3, un corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$  en  $V$  está determinado por el valor de  $[w, w]$  pero por antisimetría debe suceder que  $[w, w] = 0$  y así*

$$\forall v \in V ([v, v] = 0) \quad (3.17)$$

*Por tanto solo existe en  $V$  una posible estructura de álgebra de Lie cuyo corchete de Lie es 3.17.*

*Si en general  $(V, [\cdot, \cdot])$  es un álgebra de Lie  $n$ -dimensional donde el corchete de Lie es el de la ecuación 3.17, entonces el álgebra de Lie  $(V, [\cdot, \cdot])$  se conoce como el álgebra de Lie trivial de  $V$  o, en analogía con el conmutador de grupos, el álgebra de Lie abeliano de  $V$ .*

*Como consecuencia, si  $G$  es grupo de Lie con  $\dim(G) = 1$  entonces su álgebra de Lie  $T_e G$  es de dimensión 1 y por tanto tiene estructura de álgebra de Lie trivial. En particular, el álgebra de Lie de  $G$  es isomorfa al álgebra de Lie trivial de  $\mathbb{R}$ .*

*Por lo anterior, el álgebra de Lie asociada a  $\mathbb{S}^1$  es  $\mathbb{R}$ .*

**Ejemplo 3.4.3** (Álgebra de Lie asociada al producto de grupos de Lie). *Recordando el isomorfismo  $T_{(e,e)}(G \times H) \cong T_e G \times T_e H$ , se sigue que el álgebra de Lie asociado al producto de grupos de Lie es el producto de las álgebra de Lie asociadas a los grupos.*

*En particular, el álgebra de Lie asociada al toro  $n$ -dimensional  $(\mathbb{S}^1)^n$  es  $\mathbb{R}^n$ .*

### 3.4.2. Álgebras de Lie lineales

A las álgebras de Lie asociadas a los grupos de Lie lineales se les conoce como álgebras de Lie lineales. En esta sección calcularemos las álgebras de Lie lineales utilizando para ello la función exponencial para matrices y la identificación del corchete de Lie del álgebra general lineal con el conmutador de matrices.

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $V$   $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita. El álgebra de Lie asociado a  $GL(V)$  es isomorfo a  $Hom_K(V, V)$  con corchete de Lie igual al conmutador de transformaciones lineales*

$$\forall A, B \in Hom_K(V, V) ([A, B] := A \circ B - B \circ A)$$

*O equivalentemente, el álgebra de Lie asociado a  $GL(n, \mathbb{R})$  es isomorfo a  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  junto al*

conmutador de matrices.

*Demostración.* Dado que  $GL(V)$  es subconjunto abierto de  $Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$  entonces por la proposición 2.4.1, el álgebra de Lie asociada a  $GL(n, \mathbb{R})$  puede identificarse con  $T_I(GL(V)) = T_I(Hom_K(V, V)) \cong Hom_K(V, V)$ .

En lo que sigue identifiquemos a  $Hom_K(V, V)$  con las matrices. Sea  $n = \dim(V)$  y  $\{E^{ij}\}_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$  la base canónica de  $Hom_K(V, V)$ . Como la traslación  $L_X$  es lineal entonces  $T_I L_X$  puede identificarse con  $L_X$  y así las matrices  $A$  y  $B$  tienen asociados los campos izquierdo invariantes

$$L^A(X) = \sum_{(i,j,k) \in \{1, \dots, n\}^3} x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial E^{ij}}$$

y

$$L^B(X) = \sum_{(i,j,k) \in \{1, \dots, n\}^3} x_{ik} b_{kj} \frac{\partial}{\partial E^{ij}}$$

respectivamente.

Calculemos el conmutador de los campos

$$[L^A, L^B](X) = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} [L^A(\sum_{k=1}^n x_{ik} b_{kj}) - L^B(\sum_{k=1}^n x_{ik} a_{kj})] \frac{\partial}{\partial E^{ij}}$$

Haciendo las cuentas por separado obtenemos

$$\begin{aligned} L^A(\sum_{k=1}^n x_{ik} b_{kj}) &= \sum_{(p,q,r) \in \{1, \dots, n\}^3} x_{pr} a_{rq} \frac{\partial}{\partial E^{pq}} (\sum_{k=1}^n x_{ik} b_{kj}) \\ &= \sum_{(p,q,r) \in \{1, \dots, n\}^3} x_{pr} a_{rq} \delta_{pi} \delta_{kq} b_{qj} \\ &= \sum_{(q,r) \in \{1, \dots, n\}^2} x_{ir} a_{rq} b_{qj} \end{aligned}$$

y de forma similar

$$L^B(\sum_{k=1}^n x_{ik} a_{kj}) = \sum_{(q,r) \in \{1, \dots, n\}^2} x_{ir} b_{rq} a_{qj}$$

Por lo tanto

$$[L^A, L^B](X) = \sum_{(i,j,q,r) \in \{1, \dots, n\}^4} x_{ir} (a_{rq} b_{qj} - b_{rq} a_{qj}) \frac{\partial}{\partial E^{ij}}$$

O dicho de otro modo

$$[L^A, L^B](X) = \sum_{(i,j,r) \in \{1, \dots, n\}^3} (X)_{ir} [(AB)_{rj} - (BA)_{rj}] \frac{\partial}{\partial E^{ij}} \quad (3.18)$$

La matriz asociada al campo invariante 3.18 es la matriz  $[AB] = AB - BA$ . Por tanto el corchete

de Lie para el álgebra de Lie asociada al grupo general lineal es el conmutador de matrices.  $\square$

**Observación 3.4.4** (Álgebra general lineal). *Al álgebra de Lie asociada al grupo general lineal se le conoce como el álgebra general lineal. Como vimos por el teorema 3.4.1, dicha álgebra se puede identificar con el conjunto  $\mathfrak{gl}(V)$  de los endomorfismos del espacio vectorial de dimensión finita  $V$  en  $V$ , o como el conjunto  $\mathfrak{gl}(n)$  de matrices cuadradas de  $n \times n$  con coeficientes reales.*

*A las subálgebras de Lie del álgebra general lineal se les conoce como las álgebras de Lie lineales. Como comentaremos más adelante (Véase la observación 4.1.2), a cada subgrupo de Lie del grupo de Lie  $G$  corresponde una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Esto nos dice que para cada uno de los grupos de Lie lineales que estudiamos en secciones pasadas, va a existir una correspondiente álgebra de Lie lineal.*

Para introducir a la exponencial veamos quienes son los flujos de los campos izquierdo invariantes.

**Definición 3.4.5** (Subgrupo uniparamétrico). *Sea  $G$  grupo de Lie. Un subgrupo uniparamétrico de  $G$  es un morfismo de grupos de Lie*

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$$

El siguiente teorema nos dice que hay una correspondencia biyectiva entre los subgrupos paramétricos de  $G$  y los campos izquierdo invariantes. Por tanto hay una correspondencia biyectiva entre los subgrupos uniparamétricos y  $T_e G$

**Lema 3.4.4.** *El campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$  es izquierdo invariante.*

*Demostración.* Sean  $a, x \in \mathbb{R}$  y  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Dado que  $L_a(t) = t + a$  entonces  $\frac{\partial}{\partial t}(L_a) = 1$  y por tanto

$$(T_x L_a(\frac{\partial}{\partial t}))(f) = \frac{\partial}{\partial t}|_x (f \circ L_a) = \frac{\partial f}{\partial t}|_{x+a} \frac{\partial L_a}{\partial t}|_x = \frac{\partial f}{\partial t}|_{x+a} = \frac{\partial}{\partial t}|_{x+a}(f)$$

$\square$

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $G$  grupo de Lie. Los subgrupos uniparamétricos de  $G$  son exactamente las curvas integrales maximales de campos izquierdos invariantes que empiezan en  $e$ .*

*Demostración.* Si  $\gamma$  es curva integral maximal de un campo izquierdo invariante  $X$  que comienza en  $e$  entonces por la proposición 3.4.4  $\text{dom}(\gamma) = \mathbb{R}$ . Como  $X \sim_{L_g} X$  entonces por la proposición 2.3.4 se tiene que para  $s \in \mathbb{R}$  la curva  $t \rightarrow L_{\gamma(s)}(\gamma(t))$  es curva integral de  $X$  en  $\gamma(s)$ . Pero por el lema 3.4.2, la curva  $t \rightarrow \gamma(s+t)$  es curva integral de  $X$  en  $\gamma(s)$ . Por unicidad debe ocurrir  $\gamma(s)\gamma(t) = \gamma(s+t)$ . Por lo tanto, por ser  $\gamma$  curva suave,  $\gamma$  es subgrupo uniparamétrico de  $G$ .

Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  es grupo uniparamétrico y  $X \in \mathfrak{X}^L(G)$  el único campo izquierdo invariante tal que  $\frac{\partial}{\partial t} \sim_\gamma X$  (La existencia y unicidad del campo  $X$  se verá en la proposición 4.1.1) con  $\frac{\partial}{\partial t}$  visto

como campo izquierdo invariante en  $\mathbb{R}$  por el lema 3.4.4. De este modo, para  $t_0 \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\dot{\gamma}(t_0) = T_{t_0}\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}\right) = X_{\gamma(t_0)}$$

y por tanto  $\gamma$  es curva integral del campo izquierdo invariante  $X \in \mathfrak{X}^L(G)$  que además comienza en  $e$  pues  $\gamma(0) = e$  ya que  $\gamma$  es morfismo de grupos.  $\square$

**Definición 3.4.6.** Dado el grupo de Lie  $G$ , definimos la función exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  dada por

$$\exp(X) = \gamma_X^1(e) = \gamma_e(1)$$

**Definición 3.4.7** (Matriz exponencial). La exponencial de la matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  es la matriz

$$e^A := \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{i!} A^i \quad (3.19)$$

**Observación 3.4.5.** La serie 3.19 utilizada para definir a la matriz  $e^A$  es convergente y por tanto hablar de la matriz  $e^A$  tiene sentido.

**Proposición 3.4.5.** El subgrupo uniparamétrico de  $GL(n, \mathbb{R})$  generado por  $A \in \mathfrak{gl}(n)$  es  $\gamma(t) = e^{tA}$ .

*Demostración.* A la matriz  $A$  corresponde, por la proposición 3.4.3, el campo izquierdo invariante  $L^A$  dado por  $L^A(X) = x_{ij}a_{ak} \frac{\partial}{\partial E^{ij}}|_X$ .

El subgrupo uniparamétrico generado por  $A$  es una curva integral  $\gamma$  de  $L^A$  que satisface el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = L^A(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = I_n \end{cases}$$

La condición de ser curva integral en este caso se reduce a

$$\dot{\gamma}_{ik}(t) = \gamma_{ij}(t)A_{kj}$$

o en notación matricial

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)A \quad (3.20)$$

La ecuación diferencial lineal 3.20 junto su condición inicial tiene por solución la curva  $\gamma(t) = e^{tA}$ .  $\square$

**Proposición 3.4.6.** Sea  $H$  subgrupo de Lie del grupo de Lie  $G$ . Los subgrupos uniparamétricos de  $H$  son precisamente aquellos subgrupos uniparamétricos  $\gamma$  de  $G$  con  $\dot{\gamma}(0) \in T_e H$ .

*Demostración.* Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$  subgrupo uniparamétrico. Si  $i$  es la inclusión de  $H$  en  $G$  entonces  $i \circ \gamma$  es subgrupo uniparamétrico de  $G$  con  $\dot{\gamma}(0) \in T_e H$ .

Conversamente, si  $\gamma$  es subgrupo uniparamétrico de  $G$  con  $\dot{\gamma}(0) \in T_e H$  y  $\tilde{\gamma}$  es el subgrupo uniparamétrico de  $H$  con  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \dot{\gamma}(0)$ . Por unicidad debe ocurrir  $\gamma = \tilde{\gamma}$ .  $\square$

**Corolario 3.4.3.** *Sea  $H$  subgrupo de Lie del grupo de Lie  $G$ . Entonces*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \forall t \in \mathbb{R}(\exp(tX) \in H)\}$$

Gracias al corolario 3.4.3 y los teoremas 3.4.1 podemos hacer un cálculo directo de las álgebras de Lie lineales.

**Teorema 3.4.3.** *Sea  $A \in \mathfrak{gl}(n)$ . Entonces*

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

*Demostración.* Puede leerse como la proposición 6.32 en [Zal19].  $\square$

**Ejemplo 3.4.4.** *El álgebra de Lie asociada al grupo especial lineal  $SL(n, \mathbb{R})$  se conoce como el álgebra especial lineal y es*

$$\mathfrak{sl}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : \det(e^A) = e^{\text{tr}(A)} = 0\} = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : \text{tr}(A) = 0\}$$

*Es decir, el álgebra especial lineal consta de las matrices con traza cero.*

**Ejemplo 3.4.5.** *El álgebra de Lie asociada al grupo ortogonal  $O(n, \mathbb{R})$  es*

$$\mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : (e^A)^t(e^A) = e^{A^t+A} = I\} = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : A = -A^t\}$$

*Es decir, es el álgebra que consta de las matrices antisimétricas.*

*Similarmente, el álgebra asociada al grupo especial ortogonal  $SO(n, \mathbb{R})$  es  $\mathfrak{so}(n)$  es el álgebra de matrices antisimétricas con traza igual a cero.*

**Ejemplo 3.4.6.** *El álgebra de Lie asociada al grupo unitario  $U(n)$  es*

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : e^A e^{\bar{A}^t} = e^{A+\bar{A}^t} = I\} = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : A = -\bar{A}^t\}$$

*Es decir, es el álgebra que consta de las matrices anti-hermitianas*

*Similarmente, el álgebra asociada al grupo unitario especial  $SU(n)$  es  $\mathfrak{su}(n)$  el álgebra de matrices anti-hermitianas con traza igual a cero.*

**Ejemplo 3.4.7.** *El álgebra de Lie asociada al grupo simpléctico  $Sp(2n, \mathbb{C})$  es  $\mathfrak{sp}(2n)$  consta de las matrices  $A$  de  $2n \times 2n$  con entradas complejas tales que*

$$e^{A^t} J e^A = J \tag{3.21}$$

*Y la igualdad 3.21 se sostiene si y sólo si*

$$A^t J + J A = 0$$

## Capítulo 4

# Teoremas de Lie

En este capítulo, el corazón de la tesis, ofrecemos la descripción del funtor de Lie, el cual codifica la relación entre grupos y álgebras de Lie, de modo que es posible recuperar a los clásicos teoremas de Lie por medio de propiedades del funtor.

### 4.1. El funtor de Lie

Para la construcción del funtor de Lie nos basamos en [Pos13].

**Proposición 4.1.1.** *Sea  $f : G \rightarrow H$  un morfismo de grupos de Lie. Dado  $X \in \mathfrak{X}^L(G)$  existe un único  $Y \in \mathfrak{X}^L(H)$  tal que  $X \sim_f Y$ .*

*Es decir existe un único  $Y \in \mathfrak{X}^L(H)$  tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ x \downarrow & & \downarrow Y \\ TG & \xrightarrow{Tf} & TH \end{array} \quad (4.1)$$

*Demostración.* Si tal campo  $Y$  existe entonces de 4.1 se tiene  $Y_e = T_e f(X_e)$  y de que  $Y$  sea izquierdo invariante se obtiene  $Y_h = T_e L_h(Y_e)$  para todo  $h \in H$ . Y sustituyendo la primera igualdad en la segunda se sigue que

$$\forall h \in H (Y_h = (T_e L_h)(T_e f(X_e)) = (T_e(L_h \circ f))(X_e)) \quad (4.2)$$

De este modo, 4.2 nos da la unicidad del campo  $Y$  y además nos provee de una posible definición para el mismo. Resta ver que así definido, el campo 4.2 es izquierdo invariante y satisface el diagrama 4.1.

En primer lugar, es izquierdo invariante ya que si tomamos  $g, h \in H$  es cierta la igualdad

$$Y_{gh} = (T_e(L_{gh} \circ f))(X_e) = (T_e(L_g \circ L_h \circ f))(X_e) = T_h L_g \circ T_e(L_h \circ f)(X_e) = T_h L_g(Y_h) \quad (4.3)$$

donde la penúltima igualdad en 4.3 se debe a la proposición 2.2.8 que es la regla de la cadena.

Y el campo hace conmutar el diagrama pues dado  $g \in G$  se satisface

$$Y_{f(g)} = (T_e(L_{f(g)} \circ f))(X_e) \quad (4.4)$$

$$= (T_e(f \circ L_g))(X_e) \quad (4.5)$$

$$= T_g f \circ T_e L_g(X_e) \quad (4.6)$$

$$= T_g f(X_e) \quad (4.7)$$

donde la igualdad 4.5 se debe a que  $f$  es morfismo de grupos de Lie y por tanto  $L_{f(g)} \circ f = f \circ L_g$ , la igualdad 4.6 se debe a regla de la cadena, y 4.7 es porque  $X$  es campo izquierdo invariante.  $\square$

**Proposición 4.1.2.** *Sea  $f : G \rightarrow H$  morfismo de grupos de Lie. La función  $Lie(f) : \mathfrak{X}^L(G) \rightarrow \mathfrak{X}^L(H)$  que asigna a cada campo  $X \in \mathfrak{X}^L(G)$  el campo único  $Y \in \mathfrak{X}^L(H)$  de la proposición 4.1.1 es un morfismo de álgebras de Lie.*

*Demostración.*  $Lie(f)$  es lineal pues dados  $X, Y \in \mathfrak{X}^L(G)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  se tiene, ya que  $T_g f$  es lineal para cualesquiera  $g \in G$ , que

$$T_g f(\lambda X + Y)(g) = \lambda \cdot T_g f(X)(g) + T_g f(Y)(g) = \lambda \cdot (Lie(f)(X))(f(g)) + (Lie(f)(Y))(f(g))$$

y por la unicidad de la proposición 4.1.1 se concluye que

$$Lie(f)(\lambda X + Y) = \lambda \cdot Lie(f)(X) + Lie(f)(Y)$$

Además,  $Lie(f)$  respeta al conmutador de campos vectoriales pues dado  $p \in G$  y  $g \in C^\infty(H)$  se tiene que

$$(T_p f([X, Y]_p))(g) = (T_p f(X_p \circ Y - Y_p \circ X))(g) = X_p \circ Y(g \circ f) - Y_p \circ X(g \circ f)$$

pero utilizando 4.1 y el hecho de que  $X_p(g \circ f) = (T_p f(X_p))(g) = (Lie(f)(X))_{f(p)}(g) = ((Lie(f)(X))(g) \circ f)(p)$  entonces  $X(g \circ f) = (Lie(f)(X))(g) \circ f$ , podemos sustituir y obtener

$$(T_p f([X, Y]_p))(g) = X_p((Lie(f)(Y))(g) \circ f) - Y_p((Lie(f)(X))(g) \circ f)$$

por lo tanto

$$(T_p f([X, Y]_p))(g) = (T_p f(X_p))((Lie(f)(Y))(g)) - (T_p f(Y_p))((Lie(f)(X))(g))$$

y nuevamente por 4.1

$$(T_p f([X, Y]_p))(g) = ((Lie(f)(X))(Lie(f)(Y)) \circ f)(g) - ((Lie(f)(Y))(Lie(f)(X)) \circ f)(g)$$

Finalmente

$$(T_p f([X, Y]_p))(g) = ([Lie(f)(X), Lie(f)(Y)] \circ f)(g)$$

y como consecuencia de la unicidad de la proposición 4.1 concluimos que

$$Lie(f)([X, Y]) = [Lie(f)(X), Lie(f)(Y)]$$

Concluimos que  $Lie(f)$  es un morfismo de álgebras de Lie. □

**Observación 4.1.1.** Usando la identificación del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo de Lie  $G$  como el espacio tangente  $T_e G$  mediante la función  $G$  en la demostración de la proposición 3.4.3 se tiene que la función  $Lie(f)$  asigna a cada vector  $X_e$  el vector que resulta de evaluar el campo 4.2 en la identidad, es decir, manda a  $X_e$  a  $(T_e(L_e \circ f))(X_e) = T_e f(X_e)$ . Dicho de otro modo, el morfismo  $Lie(f)$  en  $T_e G$  viene a ser la función  $T_e f : T_e G \rightarrow T_e H$ . Así,  $T_e f$  respeta los corchetes de Lie.

**Proposición 4.1.3.** Son verdaderas las siguientes afirmaciones:

1. Si  $f : G \rightarrow H$  y  $g : H \rightarrow K$  son morfismos de grupos de Lie entonces  $Lie(g \circ f) = Lie(g) \circ Lie(f)$ .
2. Si  $G$  es grupo de Lie entonces  $Lie(1_G) = 1_{\mathfrak{g}}$ .

*Demostración.* Para facilitar la demostración utilizaremos la identificación  $\mathfrak{g} = T_e G$  de la observación 4.1.1 y aprovecharemos las propiedades funtoriales del funtor tangente.

1. Se sigue de que por regla de la cadena y ser  $f$  morfismo de grupos se cumple  $Lie(g \circ f) = T_e(g \circ f) = T_e g \circ T_e f = Lie(g) \circ Lie(f)$ .
2.  $Lie(1_G) = T_e 1_G = 1_{T_e G} = 1_{\mathfrak{g}}$ .

□

En virtud de la proposición 4.1.2 y 4.1.3 podemos dar a conocer al ansiado funtor de Lie.

**Definición 4.1.1** (Funtor de Lie). *Definimos el funtor de Lie como*

$$\text{Lie} : \mathbf{Grp}(\mathbf{Man}) \rightarrow \mathbf{LieAlg}^f$$

que manda a cada grupo de Lie  $G$  a su álgebra de Lie finita  $\mathfrak{g}$  y a cada morfismo  $f : G \rightarrow H$  de grupos de Lie le asigna el morfismo  $\text{Lie}(f)$  de álgebras de Lie.

**Observación 4.1.2.** *El funtor de Lie establece una correspondencia: A cada grupo de Lie le corresponde un álgebra de Lie. La correspondencia se puede extender entre subgrupos de Lie y subálgebras de Lie de la manera siguiente: Si  $(H, \phi)$  es subgrupo de Lie del grupo de Lie  $G$  entonces se tiene un subgrupo  $\phi[H] \leq G$ . Como  $\phi$  es inmersión entonces  $\text{Lie}(\phi)$  es inyectiva y al subgrupo de Lie  $H$  le corresponde la subálgebra de Lie  $\text{Lie}(\phi)[\mathfrak{h}]$  de  $\mathfrak{g}$ .*

## 4.2. Los teoremas de Lie

El contenido de los teoremas de Lie responde a la pregunta de la posibilidad de un resultado recíproco a los vistos anteriormente: ¿Será que a cada álgebra de Lie finita  $\mathfrak{a}$  corresponda un grupo de Lie  $G$  tal que el álgebra de Lie asociado a  $G$  sea  $\mathfrak{a}$ ? En un lenguaje categórico: ¿Existirá algún funtor adjunto al funtor  $\text{Lie}$ ? ¿Serán las categorías  $\mathbf{Grp}(\mathbf{Man})$  y  $\mathbf{LieAlg}$  equivalentes de algún modo?.

La respuesta, tras algunas obstrucciones topológicas, es afirmativa bajo ciertas restricciones.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $G$  grupo de Lie y  $\mathfrak{a}$  subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Entonces existe un único subgrupo de Lie  $H$  de  $G$  tal que  $H$  es conexo y  $\text{Lie}(H) = \mathfrak{a}$ .*

*Demostración.* La subálgebra  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{g}$ , donde identificamos a  $\mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{X}^L(G)$ , define una distribución  $D$  en  $G$ . Dado  $g \in G$ , definimos

$$D_g = \{X_g : X \in \mathfrak{a}\}$$

La distribución  $D$  es suave pues si  $\{X_i\}_{i=1}^k$  es base de  $\mathfrak{a}$  entonces  $\{X_i\}_{i=1}^k$  genera a  $D$ .  $D$  es involutiva pues si  $Y, Z \in \mathfrak{X}(D)$  con  $Y = \sum_{i=1}^k a_i X_i$  y  $Z = \sum_{j=1}^k b_j X_j$  entonces usando el hecho de que  $\mathfrak{a}$  es cerrado bajo el corchete de Lie se tiene que

$$[Y, Z] = \sum_{i,j=1}^k a_i b_j [X_i, X_j] + a_i X_i(b_j) X_j - b_j X_j(a_i) X_i \in \mathfrak{X}(D)$$

Aplicando teorema de Frobenius 2.5.3 se sigue que  $D$  es integrable. Sea  $(H, i)$  la hoja de  $G$  en  $e$ .

Notemos que si  $g \in H$  entonces  $(H, L_{g^{-1}} \circ i)$  es también variedad integrable de  $D$  en  $e$  pues dado

$h \in H$  se tiene

$$T_h(L_{g^{-1}} \circ i)[T_h H] = T_h L_{g^{-1}}[T_h i[T_h H]] = T_h(L_{g^{-1}})[D_h] = D_{g^{-1}h} \quad (4.8)$$

donde la primera igualdad en 4.8 se debe a la regla de la cadena, la segunda igualdad es porque  $H$  es variedad integrable de  $D$  y la última igualdad es porque  $\mathfrak{a}$  es subconjunto de campos izquierdo invariantes. Por unicidad de la hoja debe suceder que  $L_{g^{-1}} \circ i[H] \subseteq i[H]$  y así

$$\forall g, h \in H \ (g^{-1}h \in H)$$

, probando que  $H$  es subgrupo de  $G$ .

$H$  es grupo de Lie porque la función  $F : H \times H \rightarrow G$  dada por  $F(g, h) = i(g)^{-1}i(h)$  es suave y para la función inducida  $\tilde{F} : H \times H \rightarrow H$ , con  $\tilde{F}(g, h) = g^{-1}h$ , el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{F} & G \\ & \searrow \tilde{F} & \uparrow i \\ & & H \end{array}$$

Del diagrama y el hecho de que por la proposición 2.5.1 la hoja  $H$  es subvariedad regularmente inmersa se concluye que  $F$  es suave.

El álgebra de Lie asociado a  $H$  se puede identificar con el álgebra de Lie  $\mathfrak{a}$  visto como subespacio de  $T_e G$  pues

$$T_e H = T_e i[T_e H] = D_e = \{X_e : X \in \mathfrak{a}\}$$

Resta ver la unicidad: Supongamos que  $\tilde{H}$  es otro subgrupo de Lie de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{a}$ , visto  $\mathfrak{a}$  como subálgebra de  $T_e G$ . Entonces para  $p \in H'$  se tiene

$$T_p H' = T_e L_p[T_e H'] = T_e L_p[\mathfrak{a}] = \{T_e L_p(X) : X \in \mathfrak{a}\} = D_p$$

donde  $T_e L_p$  es biyectiva porque  $L_p$  lo es, y además usamos el isomorfismo entre  $T_e H$  y  $\mathfrak{X}^L(H)$  de la proposición 3.4.3. Por tanto  $H'$  también integra a  $D$  en  $e$  y por la unicidad que garantiza el teorema de Frobenius debe ocurrir que  $H = H'$ .  $\square$

**Teorema 4.2.2** (Teorema de Ado). *Sea  $\mathfrak{g}$  es álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces existe un morfismo de álgebra de Lie inyectivo*

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$$

para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Se puede leer como el teorema 3.17.7 en [Var13].  $\square$

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $\mathfrak{a}$  álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces existe un grupo de Lie cuya álgebra de Lie es isomorfa a  $\mathfrak{a}$ .*

*Demostración.* Por el teorema de Ado 4.2.2 existe un morfismo de álgebras de Lie inyectivo  $\phi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . De este modo  $\phi[\mathfrak{a}]$  es subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(n)$  isomorfa a  $\mathfrak{a}$ . Por el teorema 4.2.1 existe un subgrupo de Lie  $H$  de  $GL(n, \mathbb{R})$  tal que  $Lie(H) = \phi[\mathfrak{a}] \cong \mathfrak{a}$ .  $\square$

**Lema 4.2.1.** *Sea  $\phi : G \rightarrow H$  morfismo de grupos de Lie con  $G$  y  $H$  conexos. Si  $Lie(\phi) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un isomorfismo entonces  $\phi$  es función cubriente.*

*Demostración.* Como  $Lie(\phi) = T_e\phi$  es isomorfismo entonces por el teorema de la función inversa existe una vecindad  $U$  de  $e$  en  $G$  que es difeomorfa a una vecindad  $V$  de  $e$  en  $H$ .

Si  $y \in Im(\phi)$  con  $y = \phi(x)$  y  $x \in G$  entonces  $yV$  es vecindad de  $y$  tal que  $yV \subseteq Im(\phi)$  pues si  $v \in V = \phi[U]$  y  $\phi(v) = u$  con  $u \in U$  entonces  $yv = \phi(x)\phi(u) = \phi(xu) \in Im(\phi)$ . Por lo tanto el grupo  $Im(\phi)$  es abierto y por la proposición 3.2.4 es cerrado. Como  $Im(\phi) \neq \emptyset$  y  $H$  es conexo entonces  $Im(\phi) = H$  y por tanto  $\phi$  es suprayectiva.

Si para  $y \in H$  se tiene  $x \in G$  tal que  $\phi(x) = y$  entonces  $\phi$  manda a  $xU$  en  $yV$  de manera difeomorfa. Por tanto,  $\phi$  es función cubriente.  $\square$

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $G$  grupo de Lie conexo. La cubriente universal  $\tilde{G}$  de  $G$  tiene una única estructura de grupo de Lie tal que la función cubriente  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  es un morfismo de grupos de Lie. Además,  $Lie(G) \cong Lie(\tilde{G})$ .*

*Demostración.* Por el teorema 2.5.2, existe la cubriente universal de  $G$  y lo podemos identificar con  $\tilde{G} = \{[\gamma] : \gamma : [0, 1] \rightarrow G \wedge \gamma(0) = e\}$ . Se puede dotar a  $\tilde{G}$  de estructura de grupo como sigue: El producto de  $[\gamma], [\eta] \in \tilde{G}$  es la clase de equivalencia del camino  $\gamma(t)\eta(t)$ , la identidad es el camino constante  $\gamma(t) = e$  y el inverso de  $[\gamma]$  es la clase de equivalencia del camino  $\gamma(t)^{-1}$ .

La función cubriente  $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$  dada por  $\pi([\gamma]) = \gamma(1)$  es homomorfismo de grupos pues  $\pi([\gamma][\eta]) = \gamma(1)\eta(1) = \pi([\gamma])\pi([\eta])$ .

Por el teorema 2.5.1, existe una única estructura suave en  $\tilde{G}$  tal que la función  $\pi$  es suave. Vamos a tomar dicha estructura para  $\tilde{G}$ . Como consecuencia de que  $\pi$  sea difeomorfismo local se tiene  $Lie(G) \cong Lie(\tilde{G})$ .

$\tilde{G}$  es grupo de Lie puesto que la función  $\tilde{F} : \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ , dada por  $\tilde{F}([\gamma], [\eta]) = [\gamma]^{-1}[\eta]$ , es suave ya que para  $F : G \times G \rightarrow G$ , dada por  $F(g, h) = g^{-1}h$ , y  $\pi$  difeomorfismo local, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{G} \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G & \xrightarrow{F} & G \end{array}$$

La estructura es única porque si  $T_e G \cong T_e \tilde{G}$  entonces por el lema 4.2.1 se tiene un difeomorfismo local entre  $G$  y  $\tilde{G}$  pero solo hay una única estructura suave que hace a  $\pi$  un difeomorfismo local.  $\square$

**Teorema 4.2.4.** *Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie. Si  $G$  es grupo de Lie simplemente conexo entonces para cualquier morfismo de álgebras de Lie  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  existe un único morfismo de grupos de Lie  $\Phi : G \rightarrow H$  tal que  $Lie(\Phi) = \phi$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{f} := \{(X, \phi(X)) : X \in \mathfrak{g}\}$  la gráfica de  $\phi$ .  $\mathfrak{f}$  es subálgebra de  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ . Por teorema 4.2.1 existe  $K \subseteq G \times H$  grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{f}$ . Luego,  $\pi_1 := \pi_G|_K$  es morfismo de grupos tal que  $T_{(e,e)}\pi_1(X, \phi(X)) = X$ . Por tanto  $T_{(e,e)}\pi_1$  es un isomorfismo y así  $\pi_1$  es función cubriente.

Como  $G$  es simplemente conexo,  $\pi_1$  es isomorfismo de grupos de Lie y la composición

$$\Phi := \pi_H \circ \pi_1^{-1} : G \rightarrow H$$

es un morfismo de grupos de Lie tal que

$$T_e \Phi(X) = T_e \pi_2 \circ T_{(e,e)}(\pi_1^{-1})(X) = T_{(e,e)}(X, \phi(X)) = \phi(X)$$

Veamos la unicidad: supongamos que  $\Psi : G \rightarrow H$  también satisface  $T_e \Psi = \phi$ . Si definimos las gráficas  $H_1 := \{(g, \Phi(g)) : g \in G\}$  y  $H_2 := \{(g, \Psi(g)) : g \in G\}$  entonces por continuidad  $H_1$  y  $H_2$  son subgrupos de Lie conexos de  $G \times H$  con respectivas álgebras de Lie  $\mathfrak{h}_1 = \{(X, T_e \Phi(X)) : X \in \mathfrak{g}\} = \{(X, \phi(X)) : X \in \mathfrak{g}\}$  y  $\mathfrak{h}_2 = \{(X, T_e \Psi(X)) : X \in \mathfrak{g}\} = \{(X, \phi(X)) : X \in \mathfrak{g}\}$ . Por la unicidad del teorema 4.2.1 debe ocurrir  $H_1 = H_2$  y por tanto  $\Phi = \Psi$ .  $\square$

**Corolario 4.2.1.** *Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie simplemente conexos tales que  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$ . Entonces  $G \cong H$ .*

*Demostración.* Por la el teorema 4.2.4, al isomorfismo  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  le corresponde un único morfismo  $\Phi : G \rightarrow H$  y a  $\phi^{-1} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  corresponde un único morfismo  $\Psi : H \rightarrow G$ . Por la unicidad del teorema 4.2.4 y el hecho de que  $T_e(\Psi \circ \Phi) = T_e(\Psi) \circ T_e(\Phi) = \phi^{-1} \circ \phi = 1_{\mathfrak{g}} = T_e(1_G)$  entonces ocurre que  $\Psi \circ \Phi = 1_G$  y similarmente  $\Phi \circ \Psi = 1_H$ . Por lo tanto,  $G \cong H$ .  $\square$

**Observación 4.2.1.** *Mediante  $\mathbf{ScLieGrp}$  denotemos a la subcategoría de  $\mathbf{Grp}(\mathbf{Man})$  que consta de los grupos de Lie simplemente conexos. De este modo, se induce una restricción del funtor de Lie a los grupos de Lie simplemente conexos*

$$Lie_{Sc} : \mathbf{ScLieGrp} \rightarrow \mathbf{LieAlg}^f$$

**Teorema 4.2.5** (Segundo teorema de Lie). *El funtor  $Lie_{Sc}$  es fiel y pleno.*

*Demostración.* Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie simplemente conexos. Por el teorema 4.2.4, si  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es morfismo de álgebras de Lie entonces existe un único morfismo de grupos de Lie  $\Phi : G \rightarrow H$  tal que  $Lie(\Phi) = \phi$ . Dicho de otro modo, la asignación  $F : Hom_{LieAlg^f}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \rightarrow Hom_{ScLieGrp}(G, H)$ , dada por  $F(\phi) = \Phi$ , es biyectiva.  $\square$

**Teorema 4.2.6** (Tercer teorema de Lie). *El funtor  $Lie_{Sc}$  es esencialmente suprayectivo.*

*Demostración.* Si  $\mathfrak{a}$  es álgebra de Lie entonces por el teorema 4.2.3 existe  $G$  grupo de Lie tal que  $Lie(G) \cong \mathfrak{a}$ . Si  $\tilde{G}$  es la cubriente universal de  $G$  entonces  $\tilde{G}$  es simplemente conexo y por la proposición 4.2.1  $Lie(\tilde{G}) \cong Lie(G) \cong \mathfrak{a}$ .  $\square$

**Corolario 4.2.2.** *Las categorías  $ScLieGrp$  y  $LieAlg^f$  son equivalentes.*

*Demostración.* Por los teoremas 4.2.5 y 4.2.6 el funtor  $Lie_{Sc}$  es fiel, pleno y esencialmente suprayectivo. Por tanto, por la proposición 1.3.7 se tiene que  $Lie_{Sc}$  es una equivalencia de categorías.  $\square$

**Teorema 4.2.7** (Primer teorema de Lie). *El funtor  $Lie_{Sc}$  tiene un adjunto izquierdo.*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{a}$  álgebra de Lie de dimensión finita. Por el teorema 4.2.6 existe un grupo de Lie simplemente conexo  $\tilde{G}$  tal que  $\phi : \mathfrak{a} \cong Lie(\tilde{G})$ . Si  $\psi : \mathfrak{a} \rightarrow Lie(\tilde{H})$  es un morfismo de álgebras de Lie con  $\tilde{H}$  grupo de Lie simplemente conexo entonces  $\psi \circ \phi^{-1} : Lie(\tilde{G}) \rightarrow Lie(\tilde{H})$  es morfismo de álgebras de Lie. Por el teorema 4.2.5 existe un único morfismo  $\Phi : \tilde{G} \rightarrow \tilde{H}$  tal que  $Lie(\Phi) = \psi \circ \phi^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \xrightarrow{\phi} & Lie(\tilde{G}) \\ & \searrow \psi & \downarrow Lie(\Phi) \\ & & Lie(\tilde{H}) \end{array}$$

En otras palabras,  $(Lie(\tilde{G}), \phi)$  es objeto universal de  $\mathfrak{a}$  a  $Lie_{Sc}$ . Por la proposición 1.3.3, el funtor  $Lie_{Sc}$  tiene un funtor adjunto izquierdo que envía a cada álgebra de Lie  $\mathfrak{a}$  a la cubriente universal  $\tilde{G}$  de un grupo  $G$  que satisface  $Lie(G) = \mathfrak{a}$ .  $\square$

En caso de que  $G$  no sea grupo simplemente conexo, veremos que podemos recuperarlo mediante un cociente del cubriente universal.

**Lema 4.2.2.** *Cualquier subgrupo normal discreto  $H$  de un grupo de Lie conexo  $G$  es central.*

*Demostración.* Dado  $h \in H$ , la función  $\phi : G \rightarrow H$  dada por  $\phi(g) = ghg^{-1}$ . Entonces  $\phi[G]$  es conexo en  $H$ . Como  $H$  es discreto entonces consiste de un único punto  $h = \phi(e)$  y por lo tanto  $gh = hg$  para toda  $g \in G$ .  $\square$

**Proposición 4.2.2.** *Sea  $G$  grupo de Lie y  $\tilde{G}$  su cubriente universal. Existe un subgrupo central  $H$  de  $\tilde{G}$  tal que*

$$G \cong \tilde{G}/H$$

y la proyección  $\pi : \tilde{G}/H \rightarrow G$  es función cubriente.

*Demostración.* Sea  $H = \ker(\pi)$ . Entonces  $H$  es cerrado y normal.  $H$  es discreto porque es la pre-imagen de un solo punto por una función cubriente. Por el lema 4.2.2,  $H$  es central. Finalmente, por el primer teorema de isomorfismo se tiene  $\tilde{G}/H \cong G$ .  $\square$

### 4.3. Aplicación: Clasificación de grupos de Lie

La correspondencia entre grupos y álgebras de Lie que hemos visto a lo largo del capítulo es tan robusta que puede convertir el problema de la clasificación de los grupos de Lie conexos en el problema de la clasificación de álgebras de Lie de dimensión finita.

Inspirados por el espíritu del teorema de Jordan-Hölder, donde los grupos simples actúan como bloques de construcción, la clasificación de los grupos de Lie conexos se reduce al estudio de los grupos simples y sus centros discretos

**Definición 4.3.1** (Grupo de Lie simple). *Un grupo de Lie conexo  $G$  es simple si es no abeliano y no posee subgrupos normales conexos propios no triviales.*

**Definición 4.3.2** (Ideal de un álgebra de Lie). *Sea  $V$  álgebra de Lie y  $W \subseteq V$ .  $W$  es ideal de  $V$  si*

$$\forall w \in W \forall v \in V ([w, v] \in W)$$

**Definición 4.3.3** (Álgebra de Lie simple). *Un álgebra de Lie  $V$  es simple si es no trivial y no tiene ideales propios no triviales.*

Enunciamos sin demostrar el siguiente par de resultados.

**Proposición 4.3.1.** *Sea  $G$  grupo de Lie conexo con  $H$  subgrupo de Lie conexo de  $G$ .  $H$  es normal si y sólo si  $\mathfrak{h}$  es ideal de  $\mathfrak{g}$ .*

*Demostración.* Se puede leer como el teorema 20.28 de [Lee03].  $\square$

**Corolario 4.3.1.** *Sea  $G$  grupo de Lie conexo.  $G$  es simple si y sólo si  $\mathfrak{g}$  es simple.*

*Demostración.* Por la proposición 4.3.1,  $H$  es subgrupo normal conexo propio no trivial de  $G$  si y sólo si  $\mathfrak{h}$  es ideal propio no trivial de  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**Proposición 4.3.2.** *Sea  $\mathfrak{g}$  álgebra de Lie de dimensión finita. Los grupos de Lie conexos cuya álgebra de Lie es isomorfa a  $\mathfrak{g}$  son precisamente aquellos de la forma  $G/\Gamma$  con  $G$  simplemente conexo tal que  $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$  y  $\Gamma$  subgrupo discreto normal de  $G$ .*

*Demostración.* Se puede leer como el teorema 21.29 de [Lee03].  $\square$

Debido a que por el tercer teorema de Lie siempre existe un álgebra de Lie que se integra a cualquier grupo de Lie entonces por el corolario 4.3.1 la clasificación de grupos de Lie simplemente conexos se reduce al problema de clasificación de álgebras de Lie de dimensión finita. De hecho, la clasificación de álgebras de Lie complejas simples fue un problema completado por Cartan y Killing: Se cuenta con las familias clásicas  $A_n, B_n, C_n$  y  $D_n$  además de las familias excepcionales  $E_6, E_7, E_8, F_4$  y  $G_2$ .

Así, por las proposiciones 4.2.2 y 4.3.2, si tenemos clasificados los grupos de Lie simplemente conexos simples entonces los grupos conexos simples se obtienen de sacar el cociente de los grupos de Lie simplemente conexos simples con sus subgrupos normales discretos.

En el presente trabajo se trabajaron álgebras de Lie reales y hemos mencionado que existe una clasificación para las álgebras de Lie complejas. ¿Cómo se relacionan estas dos? De esta pregunta surge naturalmente el estudio de la complejificación de un álgebra de Lie real.

**Proposición 4.3.3** (Complejificación). *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie real de dimensión finita y  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ . Entonces el corchete de Lie en  $\mathfrak{g}$  tiene una única extensión a  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  de modo que  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  tiene estructura de álgebra de Lie compleja.*

*A  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  se le conoce como la complejificación de  $\mathfrak{g}$  y a  $\mathfrak{g}$  se le conoce como la forma real de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ .*

*Demostración.* Proposición 3.37 de [Hall:364978]

□

El estudio de las álgebras de Lie complejas y la relación con sus posibles formas reales es un tema amplio y el lector interesado en ver más allá del contenido de esta bastante breve sección puede consultar el libro de Hall [Hall:364978] o el libro de Knapp [knapp1996lie]. En particular, en el capítulo 6 de [knapp1996lie] se encuentra un estudio detallado de la clasificación de álgebras de Lie reales.

# Bibliografía

- [Mac98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Vol. 5. Springer Science & Business Media, 1998.
- [Mun+02] James R Munkres et al. *Topología*. Madrid: Prentice Hall, 2002.
- [Lee03] John M Lee. “Smooth manifolds”. En: *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2003, págs. 1-29.
- [Str06] Markus Stroppel. *Locally compact groups*. Vol. 3. European Mathematical Society Zürich, Switzerland, 2006.
- [Lee09] Jeffrey Marc Lee. *Manifolds and differential geometry*. Vol. 107. American Mathematical Soc., 2009.
- [Awo10] Steve Awodey. *Category theory*. Vol. 52. OUP Oxford, 2010.
- [Gor+13] V.V. Gorbatsevich et al. *Lie Groups and Lie Algebras I: Foundations of Lie Theory Lie Transformation Groups*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [Pos13] Mikhail Mikhail Postnikov. *Geometry VI: Riemannian Geometry*. Vol. 91. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Rot13] Joseph J Rotman. *An introduction to algebraic topology*. Vol. 119. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Var13] Veeravalli S Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Vol. 102. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Zal19] Felipe Zaldívar. *Introducción al álgebra lineal*. México: papirhos, IM-UNAM, 2019.
- [Fer24] Rui Loja Fernandes. *Lectures on Differential Geometry*. World Scientific, 2024.