Notas de Geometría Algebraica
Superficies Cúbicas y la configuración de 27 lineas.

Luis Manuel Reyes de la Luz

Mayo 2026

Resumen

Segundo tema del parcial 4.

Índice

1. **Variedades Grassmanianas.** 1

2. **Configuración de 27 lineas** 5

3. **Racionalidad y la Acción de Galois** 10

A. **Algunos lemas técnicos.** 13

Notación

1. Variedades Grassmanianas.

Consideremos k un campo, y V un espacio vectorial sobre k, denotemos $T^n(V) := V \otimes \cdots \otimes V$ al espacio vectorial conocido como el producto tensorial de V n veces. Este espacio esta caracterizado por codificar la información de las funciones multilineales, de hecho existe un isomorfismo natural

$$Mult_k(V, \cdots, V; W) \cong \mathrm{Hom}_k\left(T^n(V), W\right), \ \forall W \in k\textbf{-Vec}.$$

Además, este espacio tiene una acción de S_n caracterizado unicamente por la propiedad siguiente:

$$\forall \sigma \in S_n, \ \forall v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in T^n(V), \ \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

de esta manera la acción natural, induce un homomorfismo de grupos $S_n \to \mathrm{Aut}_K(T^n(V))$ y este induce un único morfismo de k-álgebras $k[S_n] \to End_K(T^n(V))$, dotando al espacio $T^n(V)$ de una estructura de $k[S_n]$-módulo.

Definimos el operador

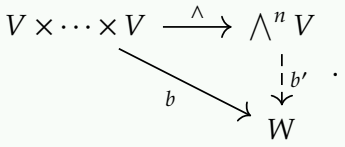
$$P_{alt} : T^n(V) \longrightarrow T^n(V), \ P_{alt}(\omega) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \cdot \omega$$

y con el el espacio exterior

$$\bigwedge^n V := T^n(V)/\ker P_{alt}$$

Proposición 1.1 *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

1. *El operador P_{alt} es $k[S_n]$-lineal.*
2. *El operador P_{alt} es idempotente.*
3. *El espacio $\bigwedge^n V$ satisface la propiedad universal siguiente, para toda función multilineal k-alternante $b\colon V \times \cdots \times V \to W$ existe una única función k-lineal $b'\colon \bigwedge^n V \to W$ tal que el siguiente diagrama conmuta*



Se sabe que si $B \subseteq V$ es una base, entonces

$$B_n := \{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n | \mid v_1, \cdots v_n \in B\}$$

es una base de $T^n(V)$. En especial si $B = \{v_k\}_{1 \leq k \leq n}$ es una base ordenada

$$B'_n := \{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_n} | \, 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq n\}$$

obteniendo que si $n = \dim_k V$ entonces $\binom{n}{k} = \dim_k \bigwedge^k V$.

Proposición 1.2 *Sea $S = \{w_1, \cdots, w_l\}$ un subconjunto de V, entonces S es linealmente dependiente si y sólo si $w_1 \wedge \cdots \wedge w_l = 0$.*

Sea V un espacio vectorial sobre el campo k de dimensión n, y sea l un entero tal que $1 \leq l \leq n$. Denotemos por $\mathrm{Sub}^l(V)$ al conjunto de todos los subespacios vectoriales de V de dimensión l.

Dado un subespacio $W \in \mathrm{Sub}^l(V)$, podemos elegir una base $\{w_1, \ldots, w_l\}$ de W. Por la Proposición 1.2, al ser estos vectores linealmente independientes, su producto exterior en el álgebra alterna es no nulo:

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_l \neq 0 \in \bigwedge^l V.$$

Si consideramos otra base $\{w'_1, \ldots, w'_l\}$ para el mismo subespacio W, existe una matriz de transición $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}(l, k)$ tal que $w'_j = \sum_{i=1}^l a_{ij} w_i$. Por la multilinealidad y la propiedad alternante, se sigue que:

$$w'_1 \wedge \cdots \wedge w'_l = \det(A)(w_1 \wedge \cdots \wedge w_l)$$

Dado que $\det(A) \neq 0$, el vector resultante en $\bigwedge^l V$ depende de la elección de la base, pero únicamente salvo multiplicación por un escalar no nulo en k. Esto motiva la transición a espacios proyectivos para eliminar la dependencia de la base.

Definición 1.1 — Espacio Proyectivo. Sea E un espacio vectorial sobre k. Se define la proyec-

tivización de E, denotada por $\mathbb{P}(E)$, como el espacio cociente

$$\mathbb{P}(E) := (E \setminus \{0\})/\sim$$

donde la relación de equivalencia está dada por $x \sim y$ si y solo si existe $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $x = \lambda y$. La clase de equivalencia de x se denota por $[x]$.

Consideremos la proyectivización de la potencia exterior, $\mathbb{P}(\bigwedge^l V)$. Por las observaciones anteriores, la siguiente función, denominada el encaje de Plücker, está bien definida:

$$\varphi : \mathrm{Sub}^l(V) \to \mathbb{P}\left(\bigwedge^l V\right), \quad W \mapsto [w_1 \wedge \cdots \wedge w_l]$$

donde $\{w_1, \ldots, w_l\}$ es cualquier base de W.

Proposición 1.3 *La función φ es inyectiva.*

Demostración. Sea $W \in \mathrm{Sub}^l(V)$ y consideremos $\omega = w_1 \wedge \cdots \wedge w_l$ un representante de la clase $\varphi(W)$. Un vector arbitrario $v \in V$ pertenece al subespacio W si y solo si el conjunto de vectores $\{v, w_1, \ldots, w_l\}$ es linealmente dependiente. Por la Proposición 1.2, esto es equivalente a la condición:

$$v \wedge \omega = 0$$

Por lo tanto, el subespacio W puede recuperarse de manera única a partir de la clase $[\omega]$ mediante el conjunto $\{v \in V \mid v \wedge \omega = 0\}$, lo que demuestra la inyectividad. ∎

Para establecer las condiciones de sobreyectividad, es necesario restringir el codominio de la función.

Definición 1.2 Un elemento $[\eta] \in \mathbb{P}(\bigwedge^l V)$ se denomina descomponible (o puro) si existe un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_l \in V$ tal que $\eta = v_1 \wedge \cdots \wedge v_l$. Denotemos por $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^l V)$ al subconjunto conformado por todas las clases de elementos descomponibles.

Por la definición misma de la función φ, la imagen de cualquier subespacio es una clase descomponible. Se sigue inmediatamente que la co-restricción de φ a este subconjunto:

$$\tilde{\varphi} : \mathrm{Sub}^l(V) \to \mathcal{D}$$

es una función biyectiva, estableciendo una correspondencia uno a uno entre los subespacios de dimensión l y los tensores descomponibles en el espacio proyectivo exterior.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ordenada de V. Una base para el espacio exterior $\bigwedge^l V$ está dada por los elementos $e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_l}$, donde $I = (i_1, \ldots, i_l)$ recorre todos los multiíndices tales que $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n$. Todo elemento $\omega \in \bigwedge^l V$ se expresa de forma única como:

$$\omega = \sum_I P_I e_I$$

Los escalares $P_I \in k$ se denominan las coordenadas de Plücker de ω. Si $\omega = w_1 \wedge \cdots \wedge w_l$ es un tensor descomponible que representa un subespacio $W \in \mathrm{Sub}^l(V)$, los coeficientes P_I corresponden exactamente a los menores maximales $(l \times l)$ de la matriz de tamaño $l \times n$ cuyas filas son los vectores $\{w_1, \ldots, w_l\}$ expresados en la base de V.

Para que la clase proyectiva $[\omega] \in \mathbb{P}(\bigwedge^l V)$ pertenezca a la imagen del encaje de Plücker $\tilde{\varphi}$, el tensor ω no puede ser arbitrario; debe ser descomponible.

Consideremos el mapeo lineal inducido por el producto exterior con ω:

$$\phi_\omega : V \to \bigwedge^{l+1} V, \quad v \mapsto v \wedge \omega$$

Por la demostración de la Proposición 1.3, si $\omega = w_1 \wedge \cdots \wedge w_l \neq 0$, entonces $\ker(\phi_\omega) = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_l\}$. Por lo tanto, un tensor $\omega \in \bigwedge^l V$ es descomponible si y solo si la dimensión del núcleo de ϕ_ω es exactamente l. Esta restricción de rango sobre ϕ_ω se traduce algebraicamente en un sistema de relaciones bilineales entre las coordenadas P_I.

Proposición 1.4 *Un tensor no nulo $\omega = \sum_I P_I e_I \in \bigwedge^l V$ es descomponible si y solo si sus coordenadas de Plücker satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas: para cualquier par de secuencias de índices $I = (i_1, \ldots, i_{l-1})$ de longitud $l-1$ y $J = (j_1, \ldots, j_{l+1})$ de longitud $l+1$, se cumple que:*

$$\sum_{k=1}^{l+1} (-1)^k P_{i_1,\ldots,i_{l-1},j_k} P_{j_1,\ldots,\hat{j_k},\ldots,j_{l+1}} = 0$$

donde la notación $\hat{j_k}$ indica que el índice j_k es omitido en la secuencia.

Si una secuencia de subíndices no está en orden estrictamente creciente, su coordenada P_K se define como $\operatorname{sgn}(\sigma) P_{K'}$, donde K' es la reordenación creciente mediante la permutación σ. Si la secuencia tiene índices repetidos, $P_K = 0$.

El conjunto $\mathrm{Sub}^l(V)$, al estar en correspondencia biyectiva con los tensores descomponibles en $\mathbb{P}(\bigwedge^l V)$ vía el encaje de Plücker, hereda una estructura de subvariedad proyectiva. Se define la **Variedad Grassmanniana**, denotada por $\mathrm{Gr}(l, V)$ o $\mathrm{Gr}(l, n)$, como el lugar geométrico cerrado en $\mathbb{P}(\bigwedge^l V)$ determinado por la anulación simultánea de todos los polinomios homogéneos generados por las relaciones de Plücker. De este modo, $\mathrm{Gr}(l, V)$ es una variedad algebraica proyectiva sobre k.

La variedad $G(1,3)$. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n = 4$ con base ordenada $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Consideremos la Grassmanniana de subespacios de dimensión $l = 2$, denotada por $\mathrm{Gr}(2,4)$.El espacio exterior $\bigwedge^2 V$ tiene dimensión $\binom{4}{2} = 6$. Su base canónica está dada por:

$$\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$$

donde $e_{ij} := e_i \wedge e_j$. Un elemento general $\omega \in \bigwedge^2 V$ se escribe como:

$$\omega = P_{12}e_{12} + P_{13}e_{13} + P_{14}e_{14} + P_{23}e_{23} + P_{24}e_{24} + P_{34}e_{34}$$

Para hallar las ecuaciones que definen el lugar geométrico de los tensores descomponibles en $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \cong \mathbb{P}^5$, aplicamos el sistema de ecuaciones de la Proposición 1.4.

Fijamos las longitudes de los multiíndices:

1. I debe tener longitud $l - 1 = 2 - 1 = 1$.
2. J debe tener longitud $l + 1 = 2 + 1 = 3$.

Elijamos $I = (1)$ y $J = (2, 3, 4)$. La relación de Plücker nos dicta la siguiente suma alternada:

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k P_{i_1,j_k} P_{j_1,\ldots,\hat{j_k},\ldots,j_3} = 0$$

Evaluando los términos para $k = 1, 2, 3$:

- Para $k = 1$, $j_1 = 2$: el índice omitido en J deja $(3, 4)$. El término es $(-1)^1 P_{12}P_{34} = -P_{12}P_{34}$.
- Para $k = 2$, $j_2 = 3$: el índice omitido en J deja $(2, 4)$. El término es $(-1)^2 P_{13}P_{24} = P_{13}P_{24}$.
- Para $k = 3$, $j_3 = 4$: el índice omitido en J deja $(2, 3)$. El término es $(-1)^3 P_{14}P_{23} = -P_{14}P_{23}$.

Sumando estos términos obtenemos la única ecuación algebraicamente independiente para este caso:

$$-P_{12}P_{34} + P_{13}P_{24} - P_{14}P_{23} = 0$$

Multiplicando por -1 para obtener la convención estándar de signos:

$$P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} = 0$$

El encaje de Plücker $\mathrm{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ realiza a la Grassmanniana (o $G(1, 3)$ proyectiva) como una hipersuperficie cuádrica en $\mathbb{P}^5$. Su ideal homogéneo está generado por un único polinomio de grado 2:

$$I(\mathrm{Gr}(2, 4)) = \langle P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} \rangle$$

2. Configuración de 27 lineas

Definición 2.1 — Superficie cúbica. Una superficie cúbica $X \subset \mathbb{P}^3_K$ es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo irreducible $F(X_0, X_1, X_2, X_3)$ de grado 3. X es suave si su criterio jacobiano (espacio tangente) tiene dimensión 2 en todo punto cerrado.

Sea $K[X_0, X_1, X_2, X_3]$ el anillo de polinomios en cuatro variables sobre el campo K. Denotemos por S_d al K-espacio vectorial formado por el polinomio nulo y todos los polinomios homogéneos de grado exacto d. Una base canónica para S_d está dada por el conjunto de monomios:

$$\mathcal{B}_d = \left\{ X_0^{a_0} X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} \mid a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \sum_{i=0}^{3} a_i = d \right\}$$

Lema 2.1 *La dimensión del espacio vectorial S_3 es 20.*

Demostración. El tamaño de la base $\mathcal{B}_3$ equivale al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3$. Por combinatoria básica (composiciones débiles o combinaciones con repetición), este número está dado por el coeficiente binomial:

$$\dim_K(S_3) = \binom{d+n}{n} = \binom{3+3}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

■

Por la Definición 2.1, una superficie cúbica X está determinada por el lugar de ceros de un polinomio $F \in S_3 \setminus \{0\}$, lo cual denotamos como $X = V(F)$.

Dado un escalar $\lambda \in K \setminus \{0\}$, los polinomios F y λF definen exactamente el mismo lugar geométrico en $\mathbb{P}^3_K$, es decir:

$$V(F) = V(\lambda F)$$

En consecuencia, la asignación de polinomios a superficies no es inyectiva. La superficie cúbica depende únicamente de la clase de proporcionalidad del polinomio F, no de sus coeficientes

individuales. Esta clase de equivalencia es un punto en la proyectivización del espacio vectorial S_3:

$$\mathbb{P}(S_3) := (S_3 \setminus \{0\})/\sim \quad \cong \mathbb{P}^{19}_K$$

donde la relación de equivalencia es la proporcionalidad escalar. Cada punto en $\mathbb{P}^{19}_K$ corresponde a una única superficie cúbica en $\mathbb{P}^3_K$.

El subconjunto de $\mathbb{P}^{19}_K$ que parametriza superficies cúbicas **suaves** es un conjunto abierto y denso en la topología de Zariski. Su complemento es una **hipersuperficie** en $\mathbb{P}^{19}_K$ llamada el lugar discriminante, el cual parametriza las cúbicas singulares donde el criterio jacobiano falla.

Puntos suaves en $\mathbb{P}^{19}_K$. Para que un punto en $\mathbb{P}^{19}$ corresponda a una superficie cúbica suave, sus coordenadas (que son los coeficientes del polinomio) deben evaluar a un valor no nulo en un polinomio específico de grado 32, llamado el discriminante.

Sea $F \in K[X_0, X_1, X_2, X_3]$ un polinomio homogéneo de grado 3, y sea $X = V(F) \subset \mathbb{P}^3_K$ la superficie cúbica asociada.

Un punto $P = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3_K$ es un punto singular de X si y solo si se anulan simultáneamente F y todas sus derivadas parciales en P:

$$F(P) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial X_i}(P) = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Para determinar la singularidad, la condición $F(P) = 0$ es redundante. Por la identidad de Euler para funciones homogéneas de grado d, tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{3} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = d \cdot F$$

Dado que $d = 3$, si $\frac{\partial F}{\partial X_i}(P) = 0$ para todo i, entonces trivialmente $3F(P) = 0$. Asumiendo que la característica del campo K no es 3, esto implica $F(P) = 0$. Por lo tanto, X es una superficie singular si y solo si el sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\frac{\partial F}{\partial X_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial X_3} = 0$$

posee al menos una solución no trivial $(x_0, x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0, 0)$ en el cierre algebraico $\overline{K}^4$.

Definición 2.2 — El discriminante. Para cualquier sistema de n polinomios homogéneos $f_1, \ldots, f_n$ en n variables, existe un único polinomio irreducible en los coeficientes de los f_i, llamado la resultante multivariada $\text{Res}(f_1, \ldots, f_n)$, que se anula si y solo si los polinomios comparten una raíz común no trivial.

Se define el discriminante del polinomio homogéneo F, denotado por $\Delta(F)$, como la resultante de su sistema de derivadas parciales:

$$\Delta(F) := \text{Res}\left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2}, \frac{\partial F}{\partial X_3}\right)$$

Proposición 2.2 *El discriminante Δ de una superficie cúbica es un polinomio homogéneo de grado exacto 32 en las 20 coordenadas del espacio de parámetros $\mathbb{P}^{19}$.*

Es un resultado clásico de geometría algebraica que si F es un polinomio homogéneo de grado d en n variables, su discriminante $\Delta(F)$ es un polinomio homogéneo en los coeficientes de F cuyo grado está dado por la fórmula:

$$\deg(\Delta) = n(d-1)^{n-1}$$

En el caso de superficies cúbicas en $\mathbb{P}^3$, tenemos $n = 4$ variables proyectivas (X_0, X_1, X_2, X_3) y el grado del polinomio es $d = 3$. Sustituyendo estos valores:

$$\deg(\Delta) = 4(3-1)^{4-1} = 4(2)^3 = 4 \times 8 = 32$$

Proposición 2.3 *Sea $c = [c_1 : c_2 : \cdots : c_{20}] \in \mathbb{P}^{19}$ un punto que parametriza la superficie cúbica $X_c = V(\sum_I c_I X^I)$. La superficie X_c es suave si y solo si:*

$$\Delta(c_1, \ldots, c_{20}) \neq 0$$

La ecuación $\Delta = 0$ define una hipersuperficie de grado 32 en $\mathbb{P}^{19}$, conocida como el lugar discriminante. El conjunto de puntos en $\mathbb{P}^{19}$ que corresponden a superficies cúbicas suaves es el complemento de esta hipersuperficie: un conjunto abierto de Zariski, denso y afín en $\mathbb{P}^{19}$. Aunque el polinomio discriminante Δ otorga el criterio exacto y formal buscado, escribirlo explícitamente es inviable, ya que para un polinomio cúbico general en 4 variables, Δ posee exactamente $34,390,305$ monomios en sus 20 variables.

Asumamos que K es algebraicamente cerrado.

Lema 2.4 — Cúbica de Fermat. *Sea K un campo algebraicamente cerrado de característica distinta de 3. La superficie cúbica $F_0 \subset \mathbb{P}^3_K$ definida por el polinomio*

$$F_0(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0$$

es una superficie suave y contiene exactamente 27 rectas. En particular, la fibra del espacio de configuración sobre F_0 tiene dimensión cero.

Demostración. Para verificar la suavidad, aplicamos el criterio jacobiano. Un punto $P = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3_K$ es un punto singular de F_0 si y solo si se anulan simultáneamente F_0 y todas sus derivadas parciales en P. Calculando las derivadas parciales obtenemos:

$$\frac{\partial F_0}{\partial X_i} = 3X_i^2 \quad \text{para } i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Igualando a cero, deducimos que $3X_i^2 = 0 \implies X_i = 0$ para toda i, lo cual produce el punto trivial $(0, 0, 0, 0)$ que no pertenece al espacio proyectivo $\mathbb{P}^3_K$. Por lo tanto, F_0 es suave.

Para encontrar las rectas contenidas en F_0, consideremos ω y η, raíces de $x^3 = -1$ en K. Las dos ecuaciones lineales:

$$X_0 = \omega X_1 \quad \text{y} \quad X_2 = \eta X_3$$

definen de manera única una recta $L \subset \mathbb{P}^3_K$. Sustituyendo las coordenadas de un punto genérico de L en la ecuación de F_0:

$$F_0(\omega X_1, X_1, \eta X_3, X_3) = (\omega X_1)^3 + X_1^3 + (\eta X_3)^3 + X_3^3 = (-1)X_1^3 + X_1^3 + (-1)X_3^3 + X_3^3 = 0$$

lo que demuestra que $L \subset F_0$.

Dado que el polinomio $x^3 + 1 = 0$ tiene 3 raíces distintas en un campo algebraicamente cerrado de característica diferente de 3, existen 3 opciones para ω y 3 opciones para η, generando $3 \times 3 = 9$ rectas bajo este agrupamiento de variables. Existen 3 formas distintas de particionar las cuatro variables en dos pares disjuntos:

$$(X_0, X_1) \text{ con } (X_2, X_3); \quad (X_0, X_2) \text{ con } (X_1, X_3); \quad (X_0, X_3) \text{ con } (X_1, X_2)$$

Esto proporciona exactamente $3 \times 9 = 27$ rectas. Al ser una cantidad finita, el conjunto de rectas en F_0 conforma un espacio discreto, cuya dimensión es por definición 0. ■

Teorema 2.5 — Existencia de Rectas. *Toda superficie cúbica $X \subset \mathbb{P}^3_K$ (con $K = \overline{K}$) contiene al menos una recta.*

Demostración. Sea $\mathbb{G}(1,3)$ la Grassmanniana de rectas proyectivas en $\mathbb{P}^3$. Dado que una recta en $\mathbb{P}^3$ corresponde a un subespacio vectorial de dimensión 2 en un espacio vectorial de dimensión 4, esta variedad corresponde exactamente a $\mathrm{Gr}(2,4)$. Su dimensión proyectiva es $\dim \mathbb{G}(1,3) = 2 \times (4-2) = 4$.

Sea $\mathbb{P}^{19}$ el espacio de parámetros de polinomios homogéneos cúbicos. Definimos la variedad de incidencia Σ como el lugar geométrico algebraico cerrado:

$$\Sigma = \{(L, X) \in \mathbb{G}(1,3) \times \mathbb{P}^{19} \mid L \subset X\}$$

Consideremos la primera proyección natural $\pi_1 : \Sigma \to \mathbb{G}(1,3)$. Analizaremos la fibra geométrica de esta proyección sobre una recta fija $L \in \mathbb{G}(1,3)$.

Mediante la transitividad de la acción proyectiva, podemos efectuar un cambio de base y asumir sin pérdida de generalidad que la recta L está definida por las ecuaciones $X_2 = 0$ y $X_3 = 0$. Un polinomio cúbico genérico F puede reescribirse agrupando los términos dependientes de X_2 y X_3:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = c_0 X_0^3 + c_1 X_0^2 X_1 + c_2 X_0 X_1^2 + c_3 X_1^3 + X_2 G_2 + X_3 H_2$$

La condición de incidencia $L \subset X$ es equivalente a que $F(X_0, X_1, 0, 0) \equiv 0$ para todo punto $[X_0 : X_1] \in \mathbb{P}^1$. Esto fuerza la anulación simultánea de los coeficientes de las potencias de X_0 y X_1:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

Estas son 4 ecuaciones lineales independientes impuestas sobre los 20 parámetros de $\mathbb{P}^{19}$. Por tanto, el espacio de soluciones conforma un subespacio proyectivo y la dimensión de la fibra por la proposición A.1 es:

$$\dim \pi_1^{-1}(L) = 19 - 4 = 15$$

Como esto aplica para cualquier recta L, el morfismo π_1 es sobreyectivo y la dimensión de la variedad de incidencia es globalmente:

$$\dim \Sigma = \dim \mathbb{G}(1,3) + \dim \pi_1^{-1}(L) = 4 + 15 = 19$$

Consideremos ahora la segunda proyección $\pi_2 : \Sigma \to \mathbb{P}^{19}$. Dado que Σ es una variedad proyectiva, el morfismo es cerrado, lo que implica que su imagen $Y = \pi_2(\Sigma)$ es un conjunto algebraico cerrado de $\mathbb{P}^{19}$.

Por el Lema 2.4, existe una superficie (la Cúbica de Fermat F_0) contenida en Y que alberga

un número finito de rectas. Así, la dimensión de su fibra bajo π_2 es cero:

$$\dim \pi_2^{-1}(F_0) = 0$$

Invocamos la Proposición A.1. Para cualquier punto cerrado $y \in f(X)$ en la imagen, todas las componentes irreducibles de la fibra $f^{-1}(y)$ tienen dimensión mayor o igual a $\dim X - \dim Y$. Aplicando esto a $\pi_2 : \Sigma \to Y$ sobre el punto $F_0 \in Y$, obtenemos:

$$\dim \pi_2^{-1}(F_0) \geq \dim \Sigma - \dim Y \implies 0 \geq 19 - \dim Y \implies \dim Y \geq 19$$

Dado que Y es un subconjunto cerrado del espacio $\mathbb{P}^{19}$, la única posibilidad para que $\dim Y \geq 19$ es que $Y = \mathbb{P}^{19}$. Por consiguiente, la proyección π_2 es sobreyectiva. Esto demuestra que para todo punto $X \in \mathbb{P}^{19}$, la fibra $\pi_2^{-1}(X)$ es no vacía, lo cual concluye geométricamente que toda superficie cúbica contiene al menos una recta. ■

Teorema 2.6 — Configuración de 27 lineas. *Toda superficie cúbica suave sobre un campo algebraicamente cerrado contiene exactamente 27 rectas.*

Demostración. Sea $X = V(F)$ una superficie cúbica suave en $\mathbb{P}^3_K$. Por el Teorema 2.5, sabemos que X contiene al menos una recta, denotémosla L.

Mediante una transformación proyectiva lineal, podemos fijar coordenadas de manera que L esté dada por las ecuaciones $X_2 = 0$ y $X_3 = 0$. Como $L \subset X$, el polinomio F debe anularse idénticamente al evaluar $X_2 = X_3 = 0$. Por lo tanto, no existen términos en F que dependan exclusivamente de X_0 y X_1, permitiéndonos agrupar la ecuación como:

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_0^2 L_0 + X_0 X_1 L_1 + X_1^2 L_2 + X_0 Q_0 + X_1 Q_1 + C_3 = 0$$

donde L_i son formas lineales en (X_2, X_3), Q_i son formas cuadráticas en (X_2, X_3) y C_3 es una forma cúbica en (X_2, X_3).

Consideremos el haz de planos en $\mathbb{P}^3_K$ que contienen a la recta L. Cada plano Π en este haz está definido por una ecuación $vX_2 - uX_3 = 0$, y queda unívocamente parametrizado por un punto $[u : v] \in \mathbb{P}^1_K$. Sobre el plano $\Pi_{[u:v]}$, podemos introducir un parámetro t tal que $X_2 = ut$ y $X_3 = vt$. Sustituyendo estas relaciones en F, hallamos la curva de intersección $X \cap \Pi_{[u:v]}$:

$$F(X_0, X_1, ut, vt) = t \cdot \left[X_0^2 L_0(u,v) + X_0 X_1 L_1(u,v) + X_1^2 L_2(u,v) + X_0 t Q_0(u,v) + X_1 t Q_1(u,v) + t^2 C_3(u,v) \right] = 0$$

El factor $t = 0$ es la recta L. El segundo factor, que igualado a cero es una ecuación cuadrática en las variables (X_0, X_1, t), define una cónica residual $C_{[u:v]}$ contenida en el plano $\Pi_{[u:v]}$. La matriz simétrica 3×3 asociada a esta cónica es:

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} L_0(u,v) & \frac{1}{2}L_1(u,v) & \frac{1}{2}Q_0(u,v) \\ \frac{1}{2}L_1(u,v) & L_2(u,v) & \frac{1}{2}Q_1(u,v) \\ \frac{1}{2}Q_0(u,v) & \frac{1}{2}Q_1(u,v) & C_3(u,v) \end{pmatrix}$$

En geometría proyectiva clásica, una cónica degenera en la unión de dos rectas si y solo si su determinante se anula. Calculamos el grado del polinomio determinante $\Delta(u,v) = \det M(u,v)$. Dado que las entradas matriciales tienen grados 1, 2 y 3 en las variables u, v, las permutaciones del determinante ($1 + 1 + 3$ o $1 + 2 + 2$) producen un polinomio homogéneo de grado exacto 5:

$$\Delta(u,v) = 0 \quad \text{(polinomio homogéneo de grado 5)}$$

Al ser K algebraicamente cerrado, $\Delta(u, v)$ posee exactamente 5 raíces contando multiplicidades. La hipótesis de que X es una superficie suave garantiza que estas 5 raíces son simples y distintas (una raíz múltiple implicaría que las rectas coinciden, generando una recta doble que induciría un punto singular en X).

Por consiguiente, existen exactamente 5 planos distintos que contienen a L donde la cónica residual se divide en un par de rectas distintas. Denotando a estos pares como (M_i, M_i') para $i = 1, \dots, 5$, demostramos que **toda recta en una cúbica suave interseca exactamente a otras 10 rectas**. Hasta este punto, hemos contabilizado $1 + 10 = 11$ rectas explícitas en X.

Para establecer que el conteo global total es 27, recurrimos a un argumento de invariancia estructural sobre el espacio de parámetros. Sea $U \subset \mathbb{P}^{19}$ el subconjunto abierto de Zariski denso que parametriza a las superficies cúbicas suaves. Consideremos la variedad de incidencia restringida $\Sigma_U = \pi_2^{-1}(U)$. Como hemos visto, el número de rectas en cualquier cúbica suave es finito (forman un conjunto discreto en $\mathbb{G}(1, 3)$), por lo que el morfismo regular proyectivo $\pi_U : \Sigma_U \to U$ tiene fibras estrictamente de dimensión cero.

Un morfismo proyectivo con fibras finitas sobre una base irreducible (y por ende conexa) U tiene un grado topológico constante. Esto significa que la cardinalidad de la fibra $|\pi_U^{-1}(X)|$ es invariante para cualquier superficie $X \in U$. Por el Lema 2.4, conocemos un punto explícito en este abierto: la Cúbica de Fermat $F_0 \in U$, cuya fibra satisface exactamente:

$$|\pi_U^{-1}(F_0)| = 27$$

Dado que el grado del morfismo π_U se preserva globalmente en U, deducimos rigurosamente que para toda superficie cúbica suave $X \in U$, el cardinal de su fibra es invariablemente 27. ■

3. Racionalidad y la Acción de Galois

Teorema 3.1 — Racionalidad de las Superficies Cúbicas. *Toda superficie cúbica suave $X \subset \mathbb{P}^3_K$ sobre un campo algebraicamente cerrado K es racional (es decir, es birracionalmente equivalente al plano proyectivo $\mathbb{P}^2_K$).*

Demostración. **Paso 1: Elección de rectas ajenas.** Por el Teorema 2.6, sabemos que la superficie X contiene exactamente 27 rectas. Sabemos además que cualquier recta en X interseca exactamente a otras 10. Por consiguiente, existen $27 - 1 - 10 = 16$ rectas que no intersecan a una recta dada. Elegimos dos rectas cualesquiera que sean ajenas (disjuntas) y las denotamos como L_1 y L_2. Al ser ajenas en $\mathbb{P}^3_K$, ambas generan todo el espacio proyectivo y no existe ningún plano que contenga a ambas simultáneamente.

Paso 2 y 3: Construcción del morfismo proyectivo. Construiremos un morfismo racional $\Phi : X \dashrightarrow L_1 \times L_2$. Sea $P \in X \setminus (L_1 \cup L_2)$ un punto genérico de la superficie. Dado que $P \notin L_1$, el punto P y la recta L_1 determinan un único plano proyectivo, denotado por $\Pi_1 = \langle P, L_1 \rangle \cong \mathbb{P}^2_K$.

Dado que L_1 y L_2 son disjuntas, la recta L_2 no puede estar contenida en Π_1, ni puede ser paralela a él de forma que lo evada (por intersección de dimensiones en $\mathbb{P}^3_K$: $\dim \Pi_1 + \dim L_2 - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 1 - 3 = 0$). Por tanto, la intersección del plano Π_1 con la recta L_2 consiste en un único punto cerrado:

$$p_2 = \Pi_1 \cap L_2$$

Ahora, consideramos la recta ℓ_P en $\mathbb{P}^3_K$ que une a los puntos P y p_2. Como ambos puntos pertenecen al plano Π_1, la recta completa ℓ_P está contenida en Π_1. Al ser $\Pi_1 \cong \mathbb{P}^2_K$, cualesquiera dos rectas en este plano deben intersecarse; así, ℓ_P interseca a L_1 en un único punto, digamos p_1.

De esta forma geométrica, ℓ_P es la *única* recta en $\mathbb{P}^3_K$ que pasa por P y se apoya simultáneamente en L_1 y L_2.

Paso 4: El mapeo directo. Definimos el morfismo racional evaluando esta incidencia transversal:

$$\Phi : X \dashrightarrow L_1 \times L_2, \quad \Phi(P) = (p_1, p_2)$$

Este morfismo está bien definido en un abierto denso de X.

Paso 5: Construcción de la inversa geométrica y birracionalidad. Para demostrar que Φ es una equivalencia birracional, construimos su inversa racional $\Psi : L_1 \times L_2 \dashrightarrow X$. Tomemos un punto genérico $(p_1, p_2) \in L_1 \times L_2$. Estos dos puntos determinan una única recta en $\mathbb{P}^3_K$, denotada por ℓ_{p_1,p_2}.

Por el Teorema de Bézout, toda recta en el espacio proyectivo interseca a una superficie de grado 3 en exactamente 3 puntos, contando multiplicidades (siempre y cuando la recta no esté completamente contenida en la superficie). Para un par genérico (p_1, p_2), la recta ℓ_{p_1,p_2} no es ninguna de las 27 rectas contenidas en X. Dado que $p_1 \in L_1 \subset X$ y $p_2 \in L_2 \subset X$, dos de estos tres puntos de intersección de la recta ℓ_{p_1,p_2} con la superficie X ya son conocidos: son p_1 y p_2. Por lo tanto, la ecuación cúbica restringida a la recta se factoriza como una cuadrática multiplicada por un factor lineal residual. Existe exactamente *un* tercer punto de intersección. Denotemos a este único punto residual como P.

Definimos la inversa:

$$\Psi : L_1 \times L_2 \dashrightarrow X, \quad \Psi(p_1, p_2) = P$$

Como $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_X$ y $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{L_1 \times L_2}$ en abiertos densos mutuos, concluimos que X es birracional a $L_1 \times L_2$.

Paso 6: Conclusión. Dado que cada recta es isomorfa a la línea proyectiva ($L_1 \cong \mathbb{P}^1_K$ y $L_2 \cong \mathbb{P}^1_K$), tenemos que $L_1 \times L_2 \cong \mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$ (la superficie cuádrica suave, o mapeo de Segre). Clásicamente se sabe que el producto $\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$ es birracionalmente equivalente al plano proyectivo $\mathbb{P}^2_K$ (por ejemplo, mediante la proyección estereográfica desde un punto). Por transitividad de las equivalencias birracionales, X es birracional a $\mathbb{P}^2_K$. ∎

> **Observación 3.2** En la geometría algebraica moderna, esta correspondencia birracional revela la estructura íntima de la superficie cúbica. El mapeo inverso que transfiere $\mathbb{P}^2_K$ hacia X no es simplemente un mapeo genérico, sino que exhibe a la superficie cúbica suave como el resultado topológico de aplicar el soplado (blow-up) al plano proyectivo $\mathbb{P}^2_K$ iterativamente en exactamente 6 puntos en posición general. Las 27 rectas provienen de: las 6 curvas excepcionales del soplado, las 15 transformadas estrictas de las líneas que unen pares de los 6 puntos ($\binom{6}{2} = 15$), y las 6 transformadas estrictas de las cónicas que pasan por 5 de los 6 puntos.

En las secciones anteriores, asumimos que el campo base era algebraicamente cerrado para garantizar la existencia geométrica de las 27 rectas. Cuando relajamos esta condición y trabajamos sobre un campo K arbitrario (como $K = \mathbb{Q}$), la superficie cúbica sigue estando bien definida, pero las variedades de incidencia (sus rectas) pueden no tener coordenadas racionales sobre K.

> **Definición 3.1 — Campo de definición e ideal conjugado.** Sea $X \subset \mathbb{P}^3_K$ una superficie cúbica definida por un polinomio homogéneo $F \in K[X_0, \ldots, X_3]$. Consideremos la base cambiada a la cerradura algebraica $\overline{X} = X \times_K \mathrm{Spec}(\overline{K})$.
>
> Sea el grupo de Galois absoluto $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Este grupo actúa de manera natural sobre el anillo de polinomios $\overline{K}[X_0, \ldots, X_3]$ actuando sobre los coeficientes. Para una recta

$L \subset \mathbb{P}^3_{\overline{K}}$ definida por el ideal $I_L = \langle H_1, H_2 \rangle$, y un elemento $\sigma \in G_K$, definimos el ideal conjugado como $I_{L^\sigma} = \langle H_1^\sigma, H_2^\sigma \rangle$. Decimos que L está definida sobre K si el ideal I_L puede ser generado por polinomios con coeficientes exclusivamente en K, lo cual equivale a que $L^\sigma = L$ para todo $\sigma \in G_K$.

Definición 3.2 — Grupo de Weyl y la Red E_6. Sea V un espacio euclidiano real dotado de un producto interno simétrico definido positivo $(\cdot, \cdot)$. Un **sistema de raíces** $\Phi \subset V$ es un conjunto finito de vectores (llamados raíces) que satisface ciertas propiedades de simetría cristalográfica. Para cada raíz $\alpha \in \Phi$, la reflexión a través del hiperplano ortogonal a α está dada por:

$$s_\alpha(x) = x - 2\frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

El **grupo de Weyl** $W(\Phi)$ es el subgrupo de isometrías de V generado por las reflexiones $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$. El grupo $W(E_6)$ corresponde al grupo de Weyl del sistema de raíces particular E_6, y su orden es $51,840$.

Proposición 3.3 — Acción de Galois y el Isomorfismo de Weyl. *El grupo G_K actúa sobre el conjunto finito de las 27 rectas $\mathcal{L}(\overline{X})$. Además, esta acción respeta las relaciones de incidencia geométrica, induciendo un homomorfismo de grupos:*

$$\rho : G_K \longrightarrow Aut(\mathcal{G}_{27}) \cong W(E_6)$$

donde $\mathcal{G}_{27}$ es el grafo de intersección de las 27 rectas.

Demostración. Sea $L \in \mathcal{L}(\overline{X})$ una recta en la superficie, definida por el ideal $I_L = \langle H_1, H_2 \rangle$. Como $L \subset \overline{X}$, el polinomio de la superficie satisface $F = AH_1 + BH_2$ para ciertos polinomios A, B sobre $\overline{K}$. Aplicando un automorfismo $\sigma \in G_K$, obtenemos $F^\sigma = A^\sigma H_1^\sigma + B^\sigma H_2^\sigma$. Como X está definida sobre K, $F^\sigma = F$, lo que implica que $F \in \langle H_1^\sigma, H_2^\sigma \rangle = I_{L^\sigma}$. Por lo tanto, la variedad conjugada L^σ está contenida en $\overline{X}$, es una recta (pues σ preserva el grado), y la acción de permutar el conjunto de 27 rectas está bien definida.

Para ver el isomorfismo con $W(E_6)$, consideramos el grupo de Picard $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \cong \mathbb{Z}^7$, dotado de la forma de intersección. La clase canónica $K_{\overline{X}}$ es invariante bajo cualquier automorfismo de la superficie. Consideremos el subespacio ortogonal a la clase canónica:

$$K_{\overline{X}}^\perp = \{C \in \mathrm{Pic}(\overline{X}) \mid C \cdot K_{\overline{X}} = 0\}$$

La forma de intersección restringida a $K_{\overline{X}}^\perp$ es definida negativa. Al cambiar el signo de esta forma, $K_{\overline{X}}^\perp$ adquiere la estructura de una red definida positiva de rango 6. Es un resultado estructural de las superficies de del Pezzo que los vectores $v \in K_{\overline{X}}^\perp$ con auto-intersección $v^2 = -2$ forman un sistema de raíces isomorfo a E_6.

Toda permutación de las 27 rectas que preserve sus números de intersección se extiende de manera única a una isometría del grupo de Picard que fija $K_{\overline{X}}$. Por tanto, el grupo de automorfismos del grafo de incidencia $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{27})$ se identifica canónicamente con el grupo de reflexiones de esta red ortogonal, es decir, $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{27}) \cong W(E_6)$. Como la acción de G_K preserva la intersección de variedades (si dos rectas se cortan, sus conjugadas también), la imagen del homomorfismo ρ está contenida en $W(E_6)$. ∎

▪ **Ejemplo 3.1 — Una cúbica sin rectas racionales.** Consideremos la superficie cúbica diagonal sobre $K = \mathbb{Q}$ definida por el polinomio:

$$X: \quad F(X_0, X_1, X_2, X_3) = 2X_0^3 + 3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$$

Para hallar un subconjunto explícito de sus rectas, proponemos buscar familias de subespacios lineales en $\mathbb{P}^3_{\overline{\mathbb{Q}}}$ que anulen idénticamente a F. Consideremos la familia de rectas $L_{\lambda,\mu}$ parametrizadas por la intersección de los hiperplanos:

$$H_1 : X_0 - \lambda X_1 = 0 \quad \text{y} \quad H_2 : X_2 - \mu X_3 = 0$$

Los puntos sobre la recta $L_{\lambda,\mu}$ tienen coordenadas de la forma $[\lambda x_1 : x_1 : \mu x_3 : x_3]$, lo que nos permite usar a $[x_1 : x_3]$ como un sistema de coordenadas proyectivas canónicas homogéneas para $L_{\lambda,\mu} \cong \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

Para que se cumpla la contención geométrica $L_{\lambda,\mu} \subset X$, la evaluación de F sobre cualquier punto de la recta debe ser idénticamente cero. Sustituyendo en la ecuación de la cúbica:

$$F|_{L_{\lambda,\mu}} = 2(\lambda x_1)^3 + 3x_1^3 + 4(\mu x_3)^3 + 5x_3^3 = (2\lambda^3 + 3)x_1^3 + (4\mu^3 + 5)x_3^3 \equiv 0$$

Como los monomios x_1^3 y x_3^3 son algebraicamente independientes en el anillo de coordenadas de $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$, esta condición se cumple si y solo si sus coeficientes se anulan simultáneamente:

$$2\lambda^3 + 3 = 0 \quad \text{y} \quad 4\mu^3 + 5 = 0$$

Extrayendo las raíces en $\overline{\mathbb{Q}}$, obtenemos:

$$\lambda = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\omega^i \quad \text{y} \quad \mu = -\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\omega^j, \quad \text{para } i, j \in \{0, 1, 2\}$$

donde $\omega = e^{2\pi i/3}$ es una raíz primitiva cúbica de la unidad. Esta construcción arroja 9 rectas distintas contenidas en X. (Permutando los emparejamientos de las variables se obtienen las otras 18).

Los coeficientes de estas rectas generan un campo de descomposición (un campo de números) L sobre $\mathbb{Q}$:

$$L = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{\frac{5}{4}}, \omega\right)$$

Dado que $3/2$ y $5/4$ no son cubos perfectos en $\mathbb{Q}$, las raíces reales $\sqrt[3]{3/2}$ y $\sqrt[3]{5/4}$ tienen grado 3 sobre $\mathbb{Q}$. Por propiedades elementales de extensiones de campos, deducimos que $[L : \mathbb{Q}] > 1$.

Bajo la acción del grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}$, existe un automorfismo σ que permuta las raíces del polinomio mínimo $x^3 - 3/2 = 0$, digamos $\sigma(\sqrt[3]{3/2}) = \omega\sqrt[3]{3/2}$. Este elemento transforma la recta L_{λ_0,μ_0} en L_{λ_1,μ_0}, por lo que la recta no es invariante. Al replicar el análisis para todos los emparejamientos posibles de variables, se demuestra que ninguna de las 27 rectas se mantiene invariante ante la totalidad del grupo de Galois absoluto de $\mathbb{Q}$. En consecuencia, la superficie X carece de rectas definidas sobre $\mathbb{Q}$. ▪

A. Algunos lemas técnicos.

Proposición A.1 *Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles sobre un campo algebraicamente cerrado k. Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular dominante. Sea $r = \dim X - \dim Y$ la diferencia de las dimensiones. Entonces, se cumplen las dos siguientes afirmaciones sobre las fibras del morfismo:*

1. *Existe un subconjunto abierto, denso y no vacío $U \subseteq Y$ tal que, para todo punto cerrado $y \in U$, la fibra $f^{-1}(y)$ tiene dimensión pura exactamente igual a r:*

$$\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y \quad \forall y \in U$$

2. *Para cualquier punto cerrado $y \in f(X)$ en la imagen, todas las componentes irreducibles de la fibra $f^{-1}(y)$ tienen dimensión mayor o igual a r. Es decir, la dimensión de las fibras "puede saltar hacia arriba.[en] puntos especiales, pero nunca hacia abajo:*

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim Y \quad \forall y \in f(X)$$